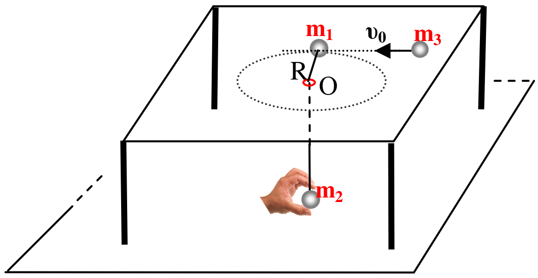
## *Η κίνηση του σφαιριδίου $m_2$*

Δύο σφαιρίδια $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες $m_1=m/2$ και $m_2=m$ αντίστοιχα είναι δεμένα στα άκρα ιδανικού νήματος αμελητέας μάζας το οποίο περνά μέσα από οπή σε λείο οριζόντιο τραπέζι όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η σφαίρα $Σ_1$ απέχει απόσταση R=0,2m από την οπή και αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο με τη βοήθεια του χεριού μας που συγκρατεί το σφαιρίδιο $Σ_2$ και το σχοινί μόλις που δεν ασκεί δύναμη, (τάση) σχήμα 1. Μια χρονική στιγμή που θεωρούμε t=0 μία σφαίρα $Σ_3$ μάζας $m_3=m/2$ κινούμενη οριζόντια και κάθετα στην ακτίνα R με ταχύτητα μέτρου $υ_0=8m/s$ συγκρούεται πλαστικά με το $Σ_1$ ενώ απελευθερώνουμε ταυτόχρονα το $Σ_2$. Η κρούση γίνεται ακαριαία και τα σώματα δεν προλαβαίνουν να αλλάξουν θέση κατά τη διάρκειά της. Αν m=1kg τότε



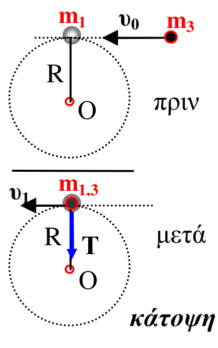
Σχήμα 1

***α)*** Να βρείτε την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση του σφαιριδίου $Σ_3$ με το σφαιρίδιο $Σ_1$.
***β)*** Περιγράψτε την κίνηση των σωμάτων του συστήματος.
***γ)*** Βρείτε ποιοτικά που επιτυγχάνεται η μέγιστη ταχύτητα της σφαίρας $Σ_2$.
***δ)*** Να βρείτε το μέγιστο ύψος από την αρχική του θέση στο οποίο θα ανέλθει κατακόρυφα το $Σ_2$.
***ε)*** Βρείτε πόσο απέχει η θέση ισορροπίας του $m_2$ από την αρχική του θέση καθώς και την ταχύτητα του σώματος $m_2$ στη θέση αυτή.

Θεωρείστε ότι η ακτίνα της τροχιάς του συσσωματώματος $m_{1,3}$ μεταβάλλεται με πολύ μικρό ρυθμό και έτσι η κίνησή του είναι σχεδόν κυκλική.
Αντιστάσεις αέρα και τριβές θεωρούνται αμελητέες.
Δίνεται $g=10m/s^2$ και $\sqrt{32}=5,65$

### *Απάντηση*

***α)*** Στη διεύθυνση κίνησης του βλήματος κατά την κρούση δεν αναπτύσσονται εξωτερικές δυνάμεις και έτσι στη διεύθυνση αυτή το σύστημα $(m_1–m_2)$ είναι μονωμένο και διατηρείται η ορμή σταθερή. Δεδομένου ότι η κρούση είναι ακαριαία και δεν αλλάζει η θέση των σωμάτων το σώμα $m_2$ θα κινηθεί μετά το τέλος της κρούσης ξεκινώντας από την ηρεμία. Το $m_{1,3}$ θα εκτελέσει σπειροειδή τροχιά και η τάση του νήματος στο τέλος της κρούσης είναι κάθετη στην ταχύτητα $υ_1$ και εκτελεί χρέη κεντρομόλου στο $m_{1,3}$



Σχήμα 2

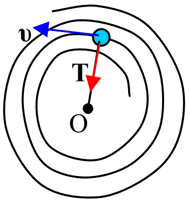
Από τη διατήρηση της ορμής πριν και μετά την κρούση για το σύστημα των σωμάτων $m_1$ και $m_3$ προκύπτει:

$$\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_3 = \vec{P}_{συσ} \overset{\leftarrow(+)}{\Rightarrow} m_3\upsilon_0 = (m_1+m_3)\upsilon_1 \Rightarrow$$
$$\upsilon_1 = 4m/s$$

Ενώ η τάση για το $m_{1,3}$ δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_\kappa = m_{1,3}\vec{a}_k \Rightarrow T = m_{1,3}\upsilon_1^2/R \Rightarrow$$
$$T = 1\cdot 4^2/0,2 \Rightarrow T = 80N$$

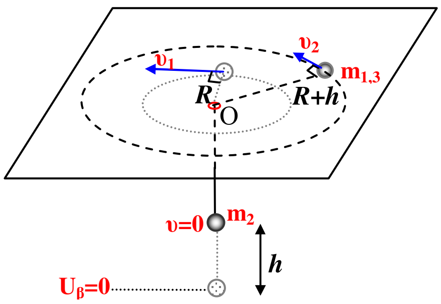
***β)*** Αμέσως μετά την κρούση η τάση του νήματος Τ είναι μεγαλύτερη του βάρους $w_2$ και το σώμα $m_2$ θα ανέλθει κατακόρυφα. Το $m_{1,3}$ στην πραγματικότητα εκτελεί σπειροειδή τροχιά και η ταχύτητά του $\boldsymbol{\upsilon}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την $\boldsymbol{\upsilon_\varepsilon}$ κάθετη στο νήμα και την $\boldsymbol{\upsilon_R}$ στη διεύθυνση του νήματος. Η ταχύτητα $\upsilon_R$ έχει ίδιο μέτρο με την ταχύτητα του σώματος $m_2$. Δεδομένου ότι η ακτίνα της τροχιάς του μεταβάλλεται με μικρό ρυθμό είναι πολύ καλή προσέγγιση να θεωρούμε ότι κάθε στιγμή το σώμα $m_{1,3}$ εκτελεί σχεδόν κυκλική κίνηση με ακτίνα την απόσταση του υλικού σημείου από την οπή Ο και σε κάθε θέση η τάση είναι κάθετη στην ταχύτητά του. Όσο η ταχύτητα $\upsilon_R$ είναι διάφορη του μηδενός το $m_2$ ανέρχεται και κάποια στιγμή θα σταματήσει να ανέρχεται. Τότε η ταχύτητα του $m_{1,3}$ είναι ακριβώς κάθετη στην τάση του νήματος. Από εκεί και μετά το φαινόμενο θα εξελιχθεί αντίστροφα δηλ. θα μειώνεται η ακτίνα της τροχιάς του $m_{1,3}$ και το $m_2$ θα κατέρχεται έως ότου τα σώματα θα βρεθούν στις αρχικές τους ακριβώς καταστάσεις λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος. Το φαινόμενο υπό ιδανικές συνθήκες θα επαναλαμβάνεται συνεχώς.



Σχήμα 3

***γ)*** Αρχικά το $\Sigma_2$ επιταχύνεται ανερχόμενο για όσο χρονικό διάστημα η τάση είναι μεγαλύτερη από το βάρος του. Στη θέση όπου το $\Sigma_2$ έχει συνισταμένη δύναμη μηδέν $\Sigma F=0$ αποκτά μέγιστη ταχύτητα καθώς από εκεί και μετά λόγω αδράνειας συνεχίζει την κίνησή του αλλά επιβραδυνόμενα διότι το βάρος του είναι μεγαλύτερο από την τάση του νήματος. Όταν το σώμα σταματήσει στιγμιαία το φαινόμενο εξελίσσεται αντίστροφα δηλ. αρχικά επιταχύνεται κατερχόμενο μέχρι τη θέση όπου η συνισταμένη του $\Sigma_2$ είναι μηδέν και κατόπιν επιβραδύνεται έως ότου σταματήσει στιγμιαία να κινείται στην αρχική θέση από όπου ξεκίνησε. Επειδή η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται η κίνηση του $m_2$ επαναλαμβάνεται.
*Η κίνηση του $m_2$ είναι **γραμμική ταλάντωση** γύρω από τη θέση ισορροπίας του δηλ. τη θέση όπου $\Sigma F=0$, μεταξύ της αρχικής του θέσης και της θέσης που σταματά στιγμιαία την κίνησή του ανερχόμενο κατακόρυφα.*

***δ)*** Εφόσον δεν υπάρχουν τριβές και το σχοινί είναι ιδανικό η μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή καθώς η μόνη εξωτερική δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος του $m_2$. Το συσσωμάτωμα $m_{1,3}$ βρίσκεται συνεχώς στο επίπεδο της επιφάνειας του τραπεζιού και δεν μεταβάλλεται η δυναμική του ενέργεια. Στη θέση αυτή η ταχύτητα του $m_{1,3}$ είναι κάθετη στην ακτίνα της τροχιάς του.
Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των σωμάτων, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την αρχική θέση της σφαίρας $\Sigma_2$, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, παίρνουμε:



Σχήμα 4

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot m_{1,3}\cdot\upsilon_1^2=\tfrac{1}{2}\cdot m_{1,3}\cdot\upsilon_2^2+m_2gh\rightarrow$$
$$m\cdot\upsilon_1^2=m\cdot\upsilon_2^2+2\cdot mgh\rightarrow$$
$$\upsilon_1^2=\upsilon_2^2+2\cdot gh \quad (1)$$

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του $m_{1,3}$ η στροφορμή του ως προς το Ο παραμένει σταθερή, αφού δεν δέχεται καμιά ροπή. Η τάση του νήματος περνά από το Ο, ενώ

$\Sigma F_y=0$ (ή διαφορετικά $w_{1,3}$ και N έχουν αντίθετες ροπές ως προς O). Έτσι η στροφορμή του $m_{1,3}$ παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του.

Από την διατήρηση της στροφορμής περί το σημείο O προκύπτει:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_h \xrightarrow{(+)\odot}$$
$$m_{1,3}\cdot\upsilon_1 R = m_{1,3}\cdot\upsilon_2(R+h)\rightarrow$$
$$\upsilon_2 = \upsilon_1 R/(R+h) \quad (2)$$

Η (1) με τη βοήθεια της (2) γίνεται:

$$\upsilon_1^2=\upsilon_1^2\cdot R^2/(R+h)^2+2\cdot gh\rightarrow$$
$$\upsilon_1^2\cdot(R+h)^2=\upsilon_1^2\cdot R^2+2\cdot g(R+h)^2\cdot h\rightarrow$$
$$\upsilon_1^2\cdot(R^2+2R\cdot h+h^2)=\upsilon_1^2\cdot R^2+2\cdot g\cdot(R^2+2R\cdot h+h^2)\cdot h\rightarrow$$
$$\underline{\upsilon_1^2\cdot R^2}+2R\cdot\upsilon_1^2\cdot h+\upsilon_1^2\cdot h^2=\underline{\upsilon_1^2\cdot R^2}+2\cdot g\cdot R^2\cdot h+4\cdot g\cdot R\cdot h^2+2\cdot g\cdot h^3\rightarrow$$
$$2R\cdot\upsilon_1^2\cdot h+\upsilon_1^2\cdot h^2=2\cdot g\cdot R^2\cdot h+4\cdot g\cdot R\cdot h^2+2\cdot g\cdot h^3\rightarrow$$
$$2\cdot g\cdot h^3+(4\cdot g\cdot R-\upsilon_1^2)\,h^2+(2\cdot g\cdot R^2-2R\cdot\upsilon_1^2)h=0\rightarrow$$
$$h[2\cdot g\cdot h^2+(4\cdot g\cdot R-\upsilon_1^2)\,h+(2\cdot g\cdot R^2-2R\cdot\upsilon_1^2)]=0 \rightarrow \text{με αντικατάσταση}$$
$$h(20\cdot h^2-8h-5{,}6)=0 \rightarrow$$
$$h(5\cdot h^2-2h-1{,}4)=0 \rightarrow (3)$$

$$\mathbf{h=0}\ \ (4) \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{5h^2-2h-1{,}4=0}\ (5)$$

Οι λύσεις της (5) είναι:
Η διακρίνουσα ισούται με
$\Delta=(-2)^2-4\cdot5\cdot(-1{,}4)=32$

Και οι λύσεις
$h=(2\pm\sqrt{32})/10 \rightarrow h=(2\pm5{,}65)/10\rightarrow h=0{,}765m$ ή $h=-0{,}365m$

με δεκτή λύση την $\mathbf{h=0{,}765m=h_{max}}$

Η ταχύτητα του $m_{1,3}$ στη θέση αυτή προκύπτει από τη (2) ίση με $\upsilon_2\approx0{,}82m/s$ και η τάση του νήματος από τη συνθήκη κεντρομόλου δίνει $T=m_{1,3}\upsilon_2^2/(R+h_{max})\approx0{,}7N$

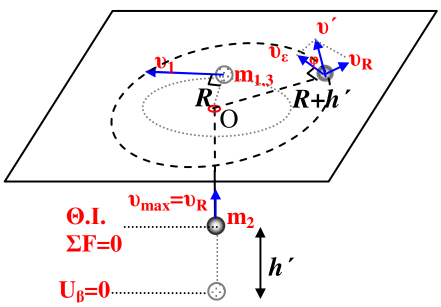
***Παρατήρηση***. Η λύση h=0 αντιστοιχεί στην άλλη ακραία θέση όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του $m_2$ και είναι η αρχική θέση του που ξεκινά την κίνησή του.

*ε)* Στη θέση ισορροπίας του σώματος $m_2$ η ταχύτητα του $m_{1,3}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες μια επιτρόχια $\upsilon_\varepsilon$, κάθετη στην ακτίνα της τροχιάς και μία ακτινική $\upsilon_R$ κατά τη διεύθυνση του νήματος το μέτρο της οποίας είναι κάθε στιγμή ίδιο με το μέτρο της ταχύτητας του $m_2$.

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow T=m_2 g \quad (6)$$

Για το $m_{1,3}$ η τάση έχει ρόλο κεντρομόλου

$$T=m_{1,3}\upsilon_\varepsilon^2/(R+h') \text{ με τη βοήθεια της (6)} \rightarrow$$
$$m_2 g=m_{1,3}\upsilon_\varepsilon^2/(R+h')\rightarrow$$
$$g=\upsilon_\varepsilon^2/(R+h') \quad (7)$$




Σχήμα 5

Η διατήρηση της στροφορμής για το $m_{1,3}$ στην αρχή και στη θέση ισορροπίας του $m_2$ δίνει

$$υ_ε= υ_1R/(R+h΄) \quad (8)$$

η (7) με τη βοήθεια της (8) δίνει

$$g = υ_1^2 R^2/(R+h΄)^3 \rightarrow$$
$$(R+h΄)^3= υ_1^2 R^2/g\rightarrow$$
$$(0,2+h΄)^3= 0,064\rightarrow$$
$$0,2+h΄=0,4\rightarrow h΄=0,2m$$

Έτσι το $m_2$ θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα σε απόσταση h΄=0,2m πάνω από την αρχική του θέση.

Η (8) δίνει για το $m_{1,3}$ : $υ_ε$=2m/s.

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των σωμάτων, στην αρχή και στη θέση που το $m_2$ αποκτά μέγιστη ταχύτητα, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την αρχική θέση της σφαίρας $Σ_2$, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$
$$½ \cdot m_{1,3}\cdot υ_1^2=½ \cdot m_{1,3}\cdot υ΄^2 + ½ \cdot m_2\cdot υ_{max}^2 + m_2gh΄\rightarrow$$
$$m\cdot υ_1^2=m\cdot υ΄^2+\cdot m\cdot υ_{max}^2 + 2mgh΄ \rightarrow$$
$$υ_1^2= \sqrt{(υ_ε^2+υ_R^2)}^2+ υ_{max}^2 +2\cdot gh΄\rightarrow υ_{max}=υ_R$$
$$υ_1^2= υ_ε^2+υ_{max}^2+ υ_{max}^2 +2\cdot gh΄\rightarrow$$
$$16=4+ 2υ_{max}^2 +4\rightarrow$$
$$υ_{max}=2 \text{ m/s}$$

και έτσι η ταχύτητα του $m_{1,3}$ είναι υ΄=2√2m/s και η γωνία που σχηματίζει η υ΄ με την $υ_ε$ είναι φ=π/4 rad

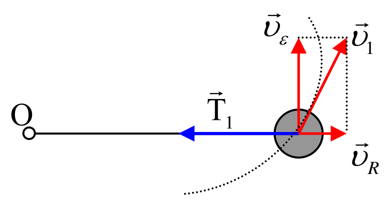
***παρατήρηση***

Στην πραγματικότητα κάνουμε ένα μικρό σφάλμα. Στην σχέση της κεντρομόλου έπρεπε να γράψουμε $T_κ =m_{1,3}υ΄^2/r$, όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που έχει στιγμιαία το σώμα $m_{1,3}$ (ακτίνα καμπυλότητας) και $T_κ$ η συνιστώσα της τάσης κάθετη στην υ΄. Με την προσέγγιση ότι κάθε στιγμή η απόσταση του Ο από το σώμα είναι περίπου ίση με την ακτίνα γράψαμε $T=m_{1,3}υ_ε^2/(R+h΄)$.

## *Σχόλια*

***1.*** Παρόλο την προσέγγιση της κυκλικής τροχιάς κατά την άνοδο του $m_2$ η τάση του νήματος και η ταχύτητα του $m_{1,3}$ σχηματίζουν γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα 6.

Καθώς το σώμα $m_2$ ανέρχεται έχει ταχύτητα $υ_2$, και το $m_{1,3}$ ταχύτητα $υ_1$. Αναλύουμε την ταχύτητα $υ_1$ σε δυο συνιστώσες, την $υ_ε$ κάθετη στο νήμα και την $υ_R$ στη διεύθυνση του νήματος. Αν υπάρχει συνιστώσα $υ_R≠0$, τότε και το άκρο του νήματος που συνδέει το $m_2$ θα έχει την ίδια ταχύτητα, πράγμα που σημαίνει ότι το μήκος του νήματος, πάνω στο τραπέζι αυξάνεται και το $m_2$ ανέρχεται. Τη στιγμή που το $m_2$ σταματά να κινείται προς τα πάνω, μηδενίζεται η ταχύτητά του δηλ. $υ_2=υ_R=0$. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος του τμήματος του νήματος που κρέμεται από το τραπέζι δεν μεταβάλλεται, οπότε και το οριζόντιο τμήμα του νήματος έχει σταθερό μήκος. Τη στιγμή αυτή η ταχύτητα $υ_1$ ταυτίζεται με την $υ_ε$ είναι δηλαδή ξανά κάθετη στο νήμα. Ανάλογα συμπεράσματα και όταν το $m_2$ κατέρχεται.

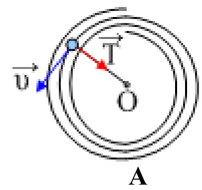


Σχήμα 6

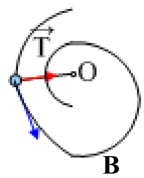
Στην αρχή δηλαδή της κίνησής του $m_{1,3}$ η στροφορμή του έχει μέτρο ακριβώς ίσο με $L_1=mR\upsilon_1$ και στη θέση που κινείται στη μεγαλύτερη τροχιά η στροφορμή του έχει μέτρο $L_2=m(R+h_{max})\upsilon_2$.

**2.** Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης η στροφορμή μένει σταθερή. Σε μια τυχαία θέση έχει μέτρο $L=m\cdot d^2\cdot\omega$, όπου d η απόσταση του κέντρου Ο από τον φορέα της ταχύτητας και δεν είναι πάντοτε r, όπου r η απόσταση του υλικού σημείου από το κέντρο Ο. Είναι $m\cdot\upsilon\cdot r$ μόνο κατά προσέγγιση αν ο ρυθμός μεταβολής του μήκους είναι μικρός. (βλ. σχόλιο 1)

Αν η ακτίνα μεταβάλλεται με μικρό ρυθμό, όπως στο σχήμα 7Α τότε είναι μια πολύ καλή προσέγγιση να θεωρούμε ότι κάθε στιγμή το σώμα, εκτελεί κυκλική κίνηση και σε κάθε θέση η τάση είναι κάθετη στην ταχύτητα.

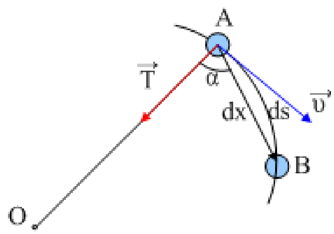



Αν βέβαια μεταβληθεί απότομα η ακτίνα της τροχιάς, όπως στο σχήμα 7Β τότε σε κάθε θέση η τάση σχηματίζει γωνία που διαφέρει κατά πολύ από τις 90° και η προσέγγιση που γίνεται είναι προβληματική.




Σχήμα 7

Αναλυτικά:
Έστω ένα υλικό σημείο που εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας r με ταχύτητα υ, ενώ η τάση του νήματος είναι $T=m\upsilon^2/r$ . Σε χρόνο dt μεταβάλλεται κατά dr η ακτίνα ενώ το σώμα διαγράφει το τόξο ΑΒ φτάνοντας από τη θέση Α στη θέση Β έχοντας μετατοπισθεί κατά dx
Η στροφορμή του υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση L=mυr.




Υ.Γ. Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί η ταχύτητα για t=0 η οποία είναι κάθετη στην τάση Τ. Στη διάρκεια του απειροστού χρονικού διαστήματος dt η ταχύτητα έχει την κατεύθυνση του dx, το οποίο σχηματίζει γωνία α με την τάση του νήματος.

Σχήμα 8

$$L=m\upsilon r\Rightarrow\frac{dL}{dt}=m\frac{d\upsilon}{dt}r+m\upsilon\frac{dr}{dt}$$

Επειδή η τάση κατευθύνεται στο κέντρο Ο η ροπή περί αυτό θα είναι μηδέν δηλ. dL/dt=0, έτσι

$$m\frac{d\upsilon}{dt}r+m\upsilon\frac{dr}{dt}=0\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{\upsilon}{r}\frac{dr}{dt}\,(1)$$

Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης.

$$P_T=\frac{dK}{dt}\Rightarrow\frac{T\cdot dx\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt}=\frac{d(\frac{1}{2}m\upsilon^2)}{dt}\Rightarrow T\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=m\upsilon\frac{d\upsilon}{dt}\quad(2)$$

Όπου α η γωνία μεταξύ της τάσης και της μετατόπισης dx

Η τάση έχει ρόλο κεντρομόλου και η (2) γίνεται

$$T\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow m\frac{\upsilon^2}{r}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{r}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} \quad (3)$$

$$\text{Η } (3) \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\upsilon^2}{r}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{\upsilon}{r}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{1}{\upsilon}\cdot\frac{dr}{dt}$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται όσο μικρότερος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας του σώματος, τόσο μικρότερο είναι το συνημίτονο, πράγμα που σημαίνει ότι η γωνία τείνει στις 90° όταν dr/dt→0. Συνεπώς τότε η προσέγγισή είναι αρκετά καλή, θεωρώντας ότι η κίνηση είναι «διαρκώς» κυκλική με ταχύτητα κάθετη στην ακτίνα, αρκεί η ακτίνα του κύκλου να μεταβάλλεται με αργό ρυθμό.

***3.*** Η παραπάνω ταλάντωση χαρακτηρίζεται γραμμική γύρω από τη Θ.Ι. μεταξύ των παραπάνω ακραίων θέσεων που βρήκαμε και οι οποίες δεν ισαπέχουν από την Θ.Ι.
Για πολύ μικρές μεταβολές της ακτίνας R, (h<<R) αποδεικνύεται ότι η κίνηση του σώματος $Σ_2$ είναι αρμονική ταλάντωση βλ. αρχείο *αρμονική ταλάντωση $m_2$* αλλά το πρόβλημα αυτό είναι εντελώς διαφορετικό από αυτό που μελετάμε.

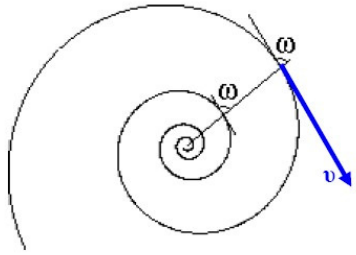
***4.*** Επιπλέον θα μπορούσε η κίνηση του $m_{1,3}$ να ακολουθεί την ακόλουθη τροχιά.

Η στροφορμή ως προς κάποιο σημείο ορίζεται γενικότερα από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων ταχύτητας και θέσης, οπότε το μέτρο της είναι: **L=m·υ·r·ημω** όπου ω η γωνία που φαίνεται σχήμα 9 η διατήρηση στροφορμής **$L_1=L_2$** γράφεται **$m\cdot\upsilon_1\cdot r_1\cdot ημω_1= m\cdot\upsilon_2\cdot r_2\cdot ημω_2$**

Ακόμη λοιπόν κι αν οι γωνίες **$ω_1$** και **$ω_2$** δεν είναι **90**° αλλά παραπλήσιες τότε:

**$m\cdot\upsilon_1\cdot r_1= m\cdot\upsilon_2\cdot r_2$**

Υπάρχει μάλιστα ένα είδος σπείρας (η ισογώνια ή λογαριθμική σπείρα) όπου η γωνία **ω** παραμένει σταθερή. (η spira mirabilis κατά Bernoulli !)




Σχήμα 9

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com