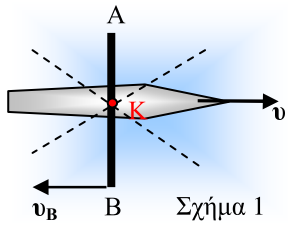
Η έλικα ενός ελικοπτέρου



Σχήμα 1

Ένα ελικόπτερο κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ=60m/s κατά μήκος του κεντρικού άξονα. Το μήκος της έλικας είναι L=15m και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο Κ. Αν κάποια στιγμή η ταχύτητα του σημείου της έλικας στη θέση Β έχει μέτρο $υ_B$=30m/s, και την φορά που φαίνεται στο σχήμα 1 τότε

i) Να βρείτε την ταχύτητα του σημείου της έλικας στη θέση Α την ίδια στιγμή.

ii) Προσδιορίστε αν υπάρχει σημείο στην έλικα στη θέση του σχήματος 1 που να έχει μηδενική ταχύτητα.

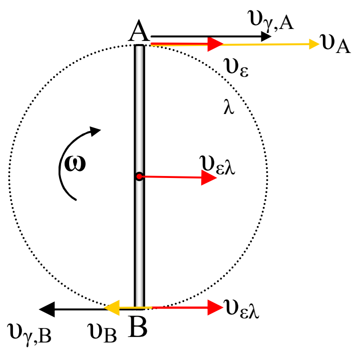
iii) Βρείτε αν υπάρχει άλλο σημείο σε οποιαδήποτε θέση της έλικας που να έχει μηδενική ταχύτητα.

iv) Να γίνει η γραφική παράσταση της ταχύτητας όλων των σημείων της έλικας στη θέση που βρίσκεται στο σχήμα 1 σε συνάρτηση με την απόσταση από τον άξονα περιστροφής.

v) Βρείτε ποια σχέση δίνει γενικά τις θέσεις των σημείων της έλικας σε τυχαία θέση που έχουν ταχύτητα μέτρου, ίση με την ταχύτητα του ελικοπτέρου συναρτήσει της απόστασης d από τον άξονα περιστροφής και της γωνία φ μεταξύ της γραμμικής τους ταχύτητας και της ταχύτητας του ελικοπτέρου. Κατόπιν προσδιορίστε τη θέση ή τις θέσεις για ένα τέτοιο σημείο που απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση d=7,5m.

Δίνεται συν(φ)= – 0,75 →φ=138,5^o, ημ(138,5^o)=0,66

Απάντηση



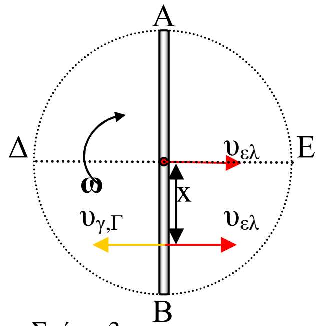
Σχήμα 2

i) Η έλικα εκτελεί σύνθετη κίνηση. Θεωρούμε την κίνησή της ως επαλληλία μιας μεταφορικής με την ταχύτητα του άξονα του ελικοπτέρου και μιας στροφικής περί τον άξονα περιστροφής της. Ο άξονας εκτελεί μεταφορική κίνηση και η ταχύτητά του είναι ίδια με του ελικοπτέρου. Για να είναι η ταχύτητα του άκρου Β προς τα αριστερά η έλικα στρέφεται δεξιόστροφα.

$$\vec{υ}_{\rm B} = \vec{υ}_{ελ} + \vec{υ}_{γ,\rm B} \overset{\leftarrow(+)}{\Rightarrow} 30 = -60 + υ_{γ,\rm B} \Rightarrow υ_{γ,\rm B} = 90m/s$$

Επειδή τα σημεία στις θέσεις Α και Β ισαπέχουν από τον άξονα στροφής θα έχουν ίδιο μέτρο γραμμικής ταχύτητας.

$$\vec{υ}_{\rm A} = \vec{υ}_{ελ} + \vec{υ}_{γ,\rm A} \overset{(+)\rightarrow}{\Rightarrow} υ_{\rm A} = 90 + 60 \Rightarrow υ_{\rm A} = 150m/s$$



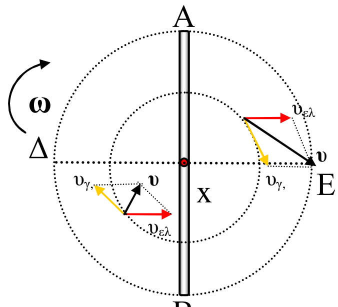
Σχήμα 3

ii) Για σημεία που βρίσκονται πάνω από τον άξονα στροφής οι ταχύτητες είναι ομόρροπες ενώ για σημεία κάτω από τον άξονα στροφής της έλικας είναι αντίρροπες. Έτσι το σημείο που θα έχει μηδενική ταχύτητα είναι κάτω από τον άξονα στροφής της έλικας.

Από την γραμμική ταχύτητα του σημείου στη θέση Β η γωνιακή ταχύτητα προκύπτει $υ_{γ,Β}$=ωR→90=ω·7,5→ω=12r/s

$$\vec{υ}_{\Gamma} = \vec{υ}_{ελ} + \vec{υ}_{γ,\Gamma} \overset{\rightarrow(+)}{\Rightarrow} 0 = υ_{ελ} - υ_{γ,\Gamma} \Rightarrow 0 = 60 - 12x \Rightarrow x = 5m$$

iii) Το μέτρο ταχύτητας ενός οποιουδήποτε σημείου που απέχει από τον άξονα στροφής της έλικας απόσταση d δίνεται από τη σχέση $\upsilon=\sqrt{\upsilon_\gamma^2+\upsilon_{\varepsilon\lambda}^2+2\upsilon_\gamma\upsilon_{\varepsilon\lambda}\text{συν}(\varphi)}$. Τα σημεία που βρίσκονται πάνω από την οριζόντια διάμετρο ΔΕ, έχουν ταχύτητα μέτρου μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ελικοπτέρου και αυτό γιατί η γραμμική ταχύτητα και η ταχύτητα του ελικοπτέρου σχηματίζουν οξεία γωνία μεταξύ τους βλ. σχήμα 4 (συν(φ)>0). Έτσι η γωνία θα πρέπει να είναι αμβλεία δηλ. $90^o \le \varphi \le 180^o$.



Σχήμα 4

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_\gamma^2+\upsilon_{\varepsilon\lambda}^2+2\upsilon_\gamma\upsilon_{\varepsilon\lambda}\text{συν}(\varphi)} \xrightarrow{\upsilon=0} 0=\sqrt{\upsilon_\gamma^2+\upsilon_{\varepsilon\lambda}^2+2\upsilon_\gamma\upsilon_{\varepsilon\lambda}\text{συν}(\varphi)} \rightarrow$$

$$0=\upsilon_\gamma^2+\upsilon_{\varepsilon\lambda}^2+2\upsilon_\gamma\upsilon_{\varepsilon\lambda}\text{συν}(\varphi) \rightarrow 0=\omega^2 d+\upsilon_{\varepsilon\lambda}^2+2\omega d\upsilon_{\varepsilon\lambda}\text{συν}(\varphi) \rightarrow$$

$$0=12^2 d+60^2+2\cdot 12\cdot d\cdot 60\cdot\text{συν}(\varphi) \rightarrow$$

$$d^2+10d\cdot\text{συν}(\varphi)+25=0$$

Η διακρίνουσα Δ πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

$\Delta \ge 0 \rightarrow 100\text{συν}^2(\varphi)-100 \ge 0 \rightarrow \text{συν}^2(\varphi)-1 \ge 0 \rightarrow \text{συν}^2(\varphi) \ge 1 \rightarrow \text{συν}(\varphi) \ge \pm 1$ με μόνη αποδεκτή λύση να είναι -1 αφού $90^o \le \varphi \le 180^o$. Δηλ. τα διανύσματα να είναι αντίρροπα που είναι μόνο το σημείο του **ii)** ερωτήματος.

Β΄ τρόπος

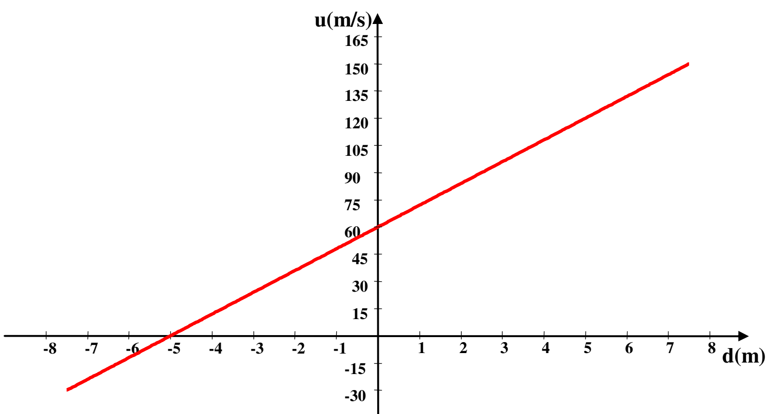
Αν υπήρχε δεύτερο σημείο με υ=0 το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία με ίδια ταχύτητα θα εκτελούσε γενικά μεταφορική κίνηση μόνο. Εδώ θα προέκυπτε ακινησία μιας και θα σύνδεε δύο σημεία με μηδενική ταχύτητα. Που είναι άτοπο.

Γ΄ τρόπος

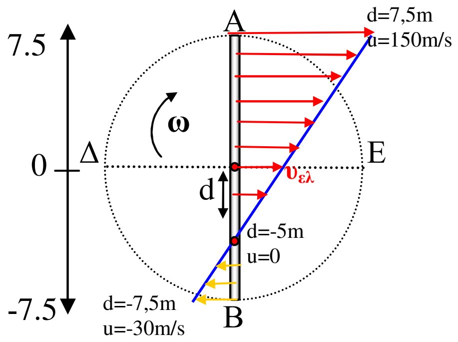
Μηδενική ταχύτητα, προϋποθέτει πως η μεταφορική και η γραμμική πρέπει να είναι αντίθετες, δηλαδή να έχουν ίδια διεύθυνση. Δηλ. $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda}+\vec{\upsilon}_\gamma \xRightarrow{\vec{\upsilon}=\vec{0}} \vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda}=-\vec{\upsilon}_\gamma$. Εφόσον όμως η γραμμική είναι πάντα κάθετη στην έλικα, θα πρέπει και η μεταφορική να είναι κάθετη και αντίρροπη της γραμμικής. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο στη θέση του σχήματος (1).

iv) Τα σημεία της έλικας όταν βρίσκεται στη θέση ΑΒ έχουν ταχύτητα στην οριζόντια διεύθυνση. Θεωρώντας ως d=0 το σημείο του άξονα περιστροφής, η σχέση που δίνει την ταχύτητα των σημείων δίνεται από τη σχέση

$\upsilon=\upsilon_{\varepsilon\lambda}+\upsilon_\gamma=60+12d$ που είναι εξίσωση ευθείας με $-7{,}5 \le d \le 7{,}5$ και τα όρια της ταχύτητας(αλγεβρικές τιμές) είναι από -30m/s στη θέση Β έως 150m/s για το Α.



Σχήμα 5



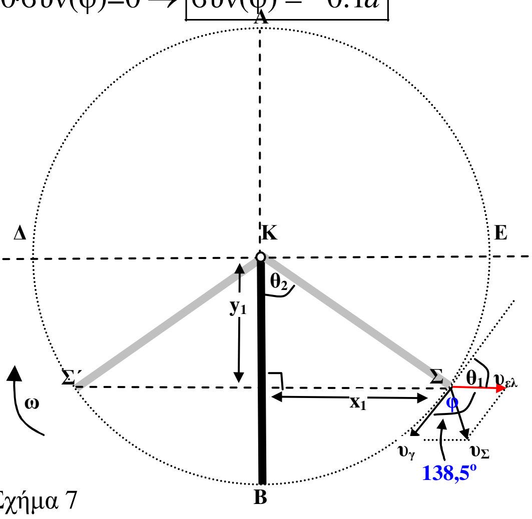
Σχήμα 6

v) Το μέτρο ταχύτητας ενός οποιουδήποτε σημείου που απέχει από τον άξονα στροφής της έλικας απόσταση d δίνεται από τη σχέση $υ=\sqrt{υ_γ^2+υ_{ελ}^2+2υ_γυ_{ελ}συν(φ)}$. Για τα σημεία που έχουν μέτρο ταχύτητας ίσο με την ταχύτητα του ελικοπτέρου θα ισχύει

$$υ=\sqrt{υ_γ^2+υ_{ελ}^2+2υ_γυ_{ελ}συν(φ)} \rightarrow υ_{ελ} = \sqrt{υ_γ^2+υ_{ελ}^2+2υ_γυ_{ελ}συν(φ)} \rightarrow υ_{ελ}^2 = υ_γ^2+υ_{ελ}^2+2υ_γυ_{ελ}συν(φ) \rightarrow$$

$$0 = υ_γ^2+2υ_γυ_{ελ}συν(φ) \rightarrow 0 = υ_γ+2υ_{ελ}συν(φ) \rightarrow 12d+2\cdot 60\cdot συν(φ)=0 \rightarrow \boxed{συν(φ) = -0.1d}$$

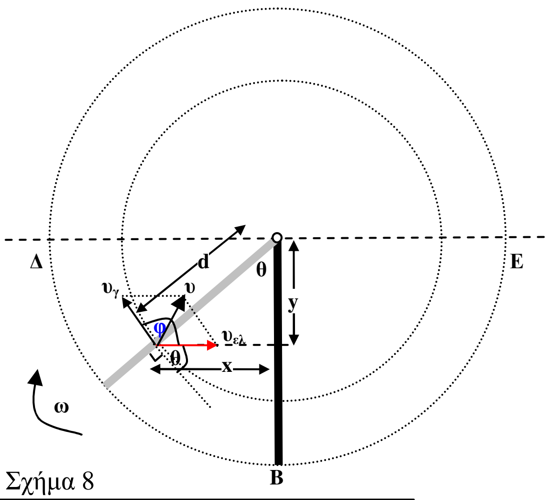
Για το σημείο Σ στο άκρο της έλικας του ελικοπτέρου $συν(φ)= -0,75 \rightarrow φ=138,5^o$
Προφανώς εκτός του σημείου Σ θα είναι και το συμμετρικό του Σ΄ όπως φαίνεται στο σχήμα 7. Η γωνία $θ_1$ ως παραπληρωματική της φ θα είναι $41,5^o$ και η $θ_2$ είναι ίση με την $θ_1$ γιατί έχουν τις πλευρές του κάθετες.
Έτσι τα σημεία Σ και Σ΄ θα ισχύει
για την y_1 απόσταση από τον άξονα παράλληλη στην έλικα δηλ. στην ΚΒ
$y_1=7.5συν(41,5^o)=7.5|συν(138,5^o)|=7,5\cdot 0,75$
$\rightarrow y_1 = 5,625m$
Και για την x_1 απόσταση από τον άξονα κάθετη στην έλικα δηλ. στην ΚΒ
$x_1=7.5ημ(41,5^o)= x=7.5ημ(138,5^o)=7,5\cdot 0,66$
$\rightarrow x_1=4,95m$



Σχήμα 7

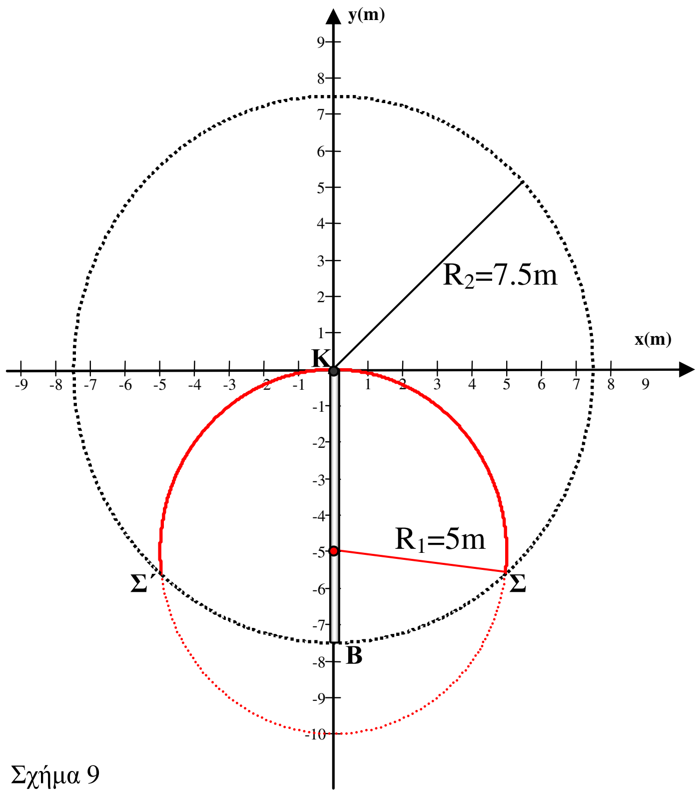
Σχόλια

1. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν μέτρο ταχύτητας ίσο με την ταχύτητα του ελικοπτέρου είναι κύκλος με ακτίνα R_1=5m και κέντρο το σημείο μηδενισμού της ταχύτητας δηλ. το σημείο που βρίσκεται στην κατακόρυφο ΑΒ στη θέση (0,–5). Αυτό είναι εύκολο να το σκεφτούμε αν θεωρήσουμε την κίνηση στροφική περί στιγμιαίου άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο (0,–5). Με αυτή τη θεώρηση η κίνηση είναι καθαρά στροφική και για τα σημεία που απέχουν απόσταση



Σχήμα 8

d=5m από τον άξονα έχουν ταχύτητα μέτρου ίσο με την ταχύτητα του ελικοπτέρου.
Αναλυτικά από το v) ερώτημα έχουμε βρει
συν(φ)= –0,1d→φ=τοξσυν(–0,1d) →
η γωνία θ=(180°–φ)
και οι συντεταγμένες του εκάστοτε σημείου
x=d·ημ(θ)→x=dημ[180°–τοξσυν(–0,1d)]
και
y=d·συν(θ)→y=dσυν[180°–τοξσυν(–0,1d)]
Με τη βοήθεια του προγράμματος graph κάνουμε τη γραφική παράσταση των σημείων x και y των παραπάνω σχέσεων και επιβεβαιώνουμε το γεωμετρικό τόπο βλ. σχήμα 9 (συνεχής κόκκινη γραμμή).



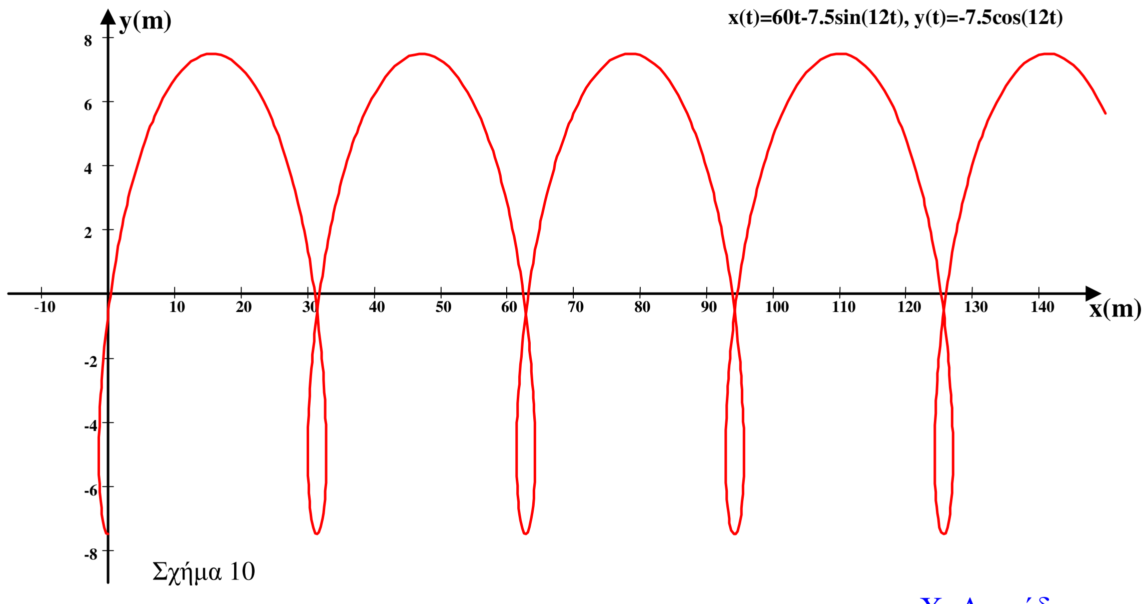
Σχήμα 9

2. Οι θέσεις των σημείων του άκρου της έλικας βρισκόμενο την t=0 στη θέση Β είναι:

$$x=\upsilon_{\varepsilon\lambda}t-R_2\eta\mu(\theta)\overset{\theta=\omega t}{\Rightarrow}x=60t-7{,}5\eta\mu(12t)$$

$$y=-R_2\sigma\upsilon\nu(\theta)\overset{\theta=\omega t}{\Rightarrow}y=-7{,}5\sigma\upsilon\nu(12t)$$

Με τη βοήθεια του graph προκύπτει η τροχιά του άκρου της έλικας που τη στιγμή μηδέν βρίσκεται στη θέση (0,–7.5).



Σχήμα 10

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com