ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Ασυμπίεστη ροή: ονομάζεται η ροή ενός ρευστού (ιδανικού ή πραγματικού) κατά την οποία οι _μεταβολές της πυκνότητας_ σε όλη την έκταση του πεδίου ροής _είναι αμελητέες_.

Συμπιεστή ροή: ονομάζεται η ροή κατά την οποία οι μεταβολές της πυκνότητας είναι σημαντικές.

Τα φαινόμενα της συμπιεστότητας εμφανίζονται σε υψηλές ταχύτητας. Όταν η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται σημαντικά η πίεση (άρα και η πυκνότητα) μεταβάλλεται, επίσης, σημαντικά.

Συνήθως, για το χαρακτηρισμό μιας ροής ως συμπιεστής ή ασυμπίεστης χρησιμοποιείται ο **αριθμός Mach**, **M**, ο οποίος ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{\mathrm{M} = \frac{\mathbf{u}}{\alpha}} \quad (1),$$

όπου **u**, είναι η τοπική ταχύτητα του ρευστού και **α** η αντίστοιχη (στο μέσο ροής) ταχύτητα του ήχου. Στην πράξη, ως *ασυμπίεστη ροή* χαρακτηρίζεται κάθε ροή στην οποία ο αριθμός Mach είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος με 0,3 :

$$\boxed{\mathrm{M} \leq \mathbf{0,3}} \quad (2)$$ [**Συνθήκη ασυμπίεστης ροής**]

Στις ροές υγρών που παρουσιάζουν τεχνικό (πρακτικό και όχι θεωρητικό) ενδιαφέρον, η ταχύτητα του υγρού είναι μικρή (συνήθως κυμαίνεται από 1m/s έως 10m/s). Από την άλλη η ταχύτητα του ήχου στα υγρά είναι αρκετά μεγάλη (της τάξης των 1000m/s), έτσι ο αριθμός Mach, είναι αρκετά μικρός, συνεπώς μπορεί να θεωρηθούν (οι ροές) ασυμπίεστες. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο με τη ροή αερίων, όπου η ταχύτητα του αερίου μπορεί να είναι ίση ή και μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου στο αέριο. Στην πράξη, σε τεχνικές εφαρμογές, η συνθήκη ασυμπίεστης ροής ικανοποιείται για ταχύτητες μικρότερες των 100m/s, αφού η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι περίπου 340m/s.

<u>Προσοχή στο εξής σημείο</u>: Όταν πρόκειται ή μας ενδιαφέρει κατά την εφαρμογή και επιλογή εξισώσεων μελέτης της συμπεριφοράς ενός ρευστού, να χαρακτηρίσουμε μία ορισμένη ροή, *εκείνο που εξετάζουμε είναι αν συγκεκριμένη ροή είναι ασυμπίεστη ή συμπιεστή και όχι αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο.*

*Το **μέτρο συμπιεστότητας, Κ,*** ενός ρευστού *(όχι της ροής) ορίζεται από τη σχέση:*

$$\boxed{\mathrm{K} = \frac{\mathbf{1}}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\mathrm{T}}}$$ *με* **ρ**: πυκνότητα, **p**: πίεση.

και εκφράζει τη σχετική μεταβολή της πυκνότητας ($\frac{\partial\rho}{\rho}$) του ρευστού, η οποία προέρχεται από τη μεταβολή της πίεσης **p**, *υπό σταθερή θερμοκρασία Τ*. Ο λόγος $\frac{\partial\rho}{\rho}$ είναι αδιάστατο μέγεθος, συνεπώς το **K** έχει *μονάδες αντίστροφης πίεσης* και στο διεθνές σύστημα είναι το $Pa^{-1}(m^2/N)$.

Το μέτρο συμπιεστότητας Κ είναι το αντίστροφο του **μέτρου ελαστικότητας, Ε,** το οποίο χρησιμοποιείται στη Μηχανική:

$$\boxed{K = \frac{\mathbf{1}}{E}}$$

Η **Ε** έχει μονάδες στο διεθνές σύστημα: Pa (N/m^2).

Μαθηματικό συμπλήρωμα

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, με διανύσματα βάσης $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ έχουμε:

1. Η ταχύτητα $\vec{\mathbf{u}}$ ενός ρευστού σωματιδίου όταν διέρχεται από ένα σημείο του πεδίου ροής είναι :

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_x.\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{u}_y.\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{u}_z.\hat{\mathbf{k}}}$$

2. Ο ανυσματικός διαφορικός τελεστής $\vec{\nabla} \equiv \nabla$:

$$\boxed{\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}}$$

3. Η γενική **διαφορική εξίσωση συνέχειας** (παραλείπεται η απόδειξη) είναι:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.\rho\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0}} \quad (1)$$

Η διατύπωση της σχέσης (1) είναι:

$$\left(\text{Ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του ρευστού σε ένα ορισμένο σημείο του πεδίου ροής.}\right) + \left(\text{Ρυθμός καθαρής εκροής μάζας ανά μονάδα όγκου από το θεωρούμενο σημείο (απειροστό όγκο).}\right) = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) ισχύει για κάθε περίπτωση ροής (μόνιμης ή μη μόνιμης, στρωτής ή τυρβώδους, συμπιεστής ή μη συμπιεστής) ενός καθαρού ρευστού ή ομογενούς μείγματος ρευστών (πραγματικού ή ιδανικού) *για παρατηρητή ο οποίος είναι έξω από το ρευστό,* υπό την προϋπόθεση να μη συμβαίνουν χημικές ή πυρηνικές αντιδράσεις στον απειροστό όγκο ελέγχου.

Επιπλέον η (2) μπορεί να τροποποιηθεί αν για την περιγραφή του πεδίου ροής του ρευστού εφαρμοστεί η μέθοδος Lagrange (κινούμενος παρατηρητής ακολουθεί την κίνηση του ρευτού) ως εξής:

Εφαρμόζοντας στη (2) την ανυσματική ταυτότητα $\boxed{\nabla \cdot \rho \vec{\mathbf{u}} = \rho \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho}$ (3), αυτή γράφεται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \, (4)$$

Στην (4) το άθροισμα των δύο πρώτων όρων συμβολίζεται (ονομάζεται *υλική παράγωγος της πυκνότητας*): $\frac{\mathbf{D}\rho}{\mathbf{Dt}} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho$ (5) . Οπότε επιστρέφοντας στην (1) με τη βοήθεια της (4) προκύπτει:

$$\boxed{\frac{\mathbf{D}\rho}{\mathbf{Dt}} + \rho \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0}} \, (5)$$

ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Όπως αναφέρθηκε, όταν η ροή είναι ασυμπίεστη, οι μεταβολές της πυκνότητας είναι αμελητέες. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των 2 πρώτων όρων της (4) είναι μηδέν, δηλαδή:

$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho = \mathbf{0}$ (6) ή ισοδύναμα $\frac{\mathbf{D}\rho}{\mathbf{Dt}} = \mathbf{0}$ (7) όπου τελικά η (5) δίνει:

$$\rho \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ή $\frac{\mathbf{D}\rho}{\mathbf{Dt}} = \mathbf{0}$ (8) (Συνθήκες ασυμπίεστης ροής)

Επιπλέον διερεύνηση:

Αν λοιπόν η ροή είναι ασυμπίεστη τότε: $\frac{\mathbf{D}\rho}{\mathbf{Dt}} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho = \mathbf{0}$ (8)

Το παραπάνω άθροισμα είναι μηδέν στις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

1. Όταν ταυτόχρονα $\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}$ και $\nabla \rho = \mathbf{0}$. Η φυσική ερμηνεία των προηγούμενων σχέσεων είναι :

$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}$. Η πυκνότητα σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου είναι σταθερή με το χρόνο [*Μόνιμη ροή* = μόνιμο πεδίο πυκνότητας].

$\nabla \rho = \mathbf{0}$. Η πυκνότητα είναι χωρικά σταθερή, δηλαδή το πεδίο πυκνότητας είναι ομοιόμορφο σε όλη την έκταση του ρευστού [*Ομοιόμορφο* πεδίο πυκνότητας].

2. Όταν το *άθροισμα των δύο όρων είναι μηδέν*,

$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} = -\vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho}$ Οπότε η ροή είναι μη μόνιμη.

<u>Συμπέρασμα</u>:

Όταν το η ροή είναι ασυμπίεστη δε σημαίνει κατά ανάγκη και μόνιμη ροή.