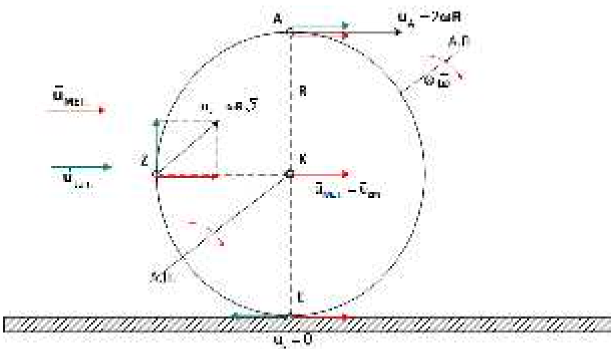
Άξονας περιστροφής

Για λόγους ευκολίας θα αναφερθώ στο κλασικό παράδειγμα ενός δίσκου ακτίνας R [φανταστείτε ένα (φανταστικό) cd όρθιο], ο οποίος κυλίεται σε οριζόντιο και <u>ακίνητο</u> (ως προς αδρανειακό παρατηρητή) δάπεδο. Συνεπώς το επίπεδο περιστροφής του δίσκου είναι κατακόρυφο και ο άξονας περιστροφής (Α.Π.) σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις θα διέρχεται από το σημείο που θα εστιάζουμε και θα είναι κάθετος στο επίπεδο αυτό. Επιπρόσθετα, λόγω της **κύλισης**[1] πάνω στο ακίνητο δάπεδο, το (μοναδικό) σημείο επαφής Ε θα έχει κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα μηδέν, $\vec{u}_E = 0$ (κινηματικός σύνδεσμος).

Συμφωνίες – παραδοχές:

1. Η ταχύτητα $\vec{u}$ ενός σημείου είναι η συνισταμένη της μεταφορικής $\vec{u}_{MET.}$ και της εκάστοτε επιτρόχιας, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου $\vec{u}_{tan.}$ γύρω από τον συμφωνηθέντα Α.Π., οπότε : $\vec{u} = \vec{u}_{MET.} + \vec{u}_{tan.}$ (1)
2. Για το μέτρο της επιτρόχιας ταχύτητας θα ισχύει: $u_{tan.} = \omega r$, με r την ακτίνα της κυκλική κίνησης που διαγράφει το σημείο γύρω από τον εκάστοτε άξονα περιστροφής και $\vec{u}_{tan.}$ **κάθετη στην** $\vec{r}$.
3. Εφόσον έχουμε επίπεδο στερεό η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ έχει το ίδιο μέτρο **ω** ανεξάρτητα της θέσης του Α.Π.
4. Το κέντρο του δίσκου Κ, θα μετατοπίζεται δεξιά (→).

1η περίπτωση: <u>Ο Α.Π. διέρχεται από το cm (K) του δίσκου (η κλασική θεώρηση).</u>



Για το σημείο επαφής Ε: Το Ε τώρα κάνει κυκλική κίνηση γύρω από το cm με ακτίνα r = R. Εφόσον $\vec{u}_E = 0$ και θεώρησα μετακίνηση του cm προς τα δεξιά, θα πρέπει να έχω ωρολογιακή περιστροφή.

$\vec{u}_E = 0 \Rightarrow u_{MET(E).} = u_{tan(E)} = \omega.R$ (2).

Η μεταφορική ταχύτητα όλων των σημείων του δίσκου είναι ίδια, συνεπώς $u_{MET(K).} = u_{MET(E).} = \omega.R$

Το K(cm) είναι πάνω στον Α.Π. συνεπώς $u_{tan(K)} = 0$.

Οπότε από (1) : $\vec{u}_{cm} = \vec{u}_{MET(cm).} + \vec{u}_{tan(cm).} \Rightarrow u_{cm} = \omega.R$

Το **ανώτερο σημείο Α** κάνει κυκλική κίνηση γύρω από το Κ με ακτίνα r = R και έχει ταχύτητα:

$\vec{u}_A = \vec{u}_{MET(A).} + \vec{u}_{tan(A).} \Rightarrow u_A = \omega R + \omega R = 2\omega R = 2u_{cm}$

///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///

[1] Με τον όρο κύλιση εννοούμε ‘’κύλιση χωρίς ολίσθηση’’

2η περίπτωση: <u>Ο Α.Π. διέρχεται από το ανώτερο σημείο Α του δίσκου (αντισυμβατική θεώρηση).</u>

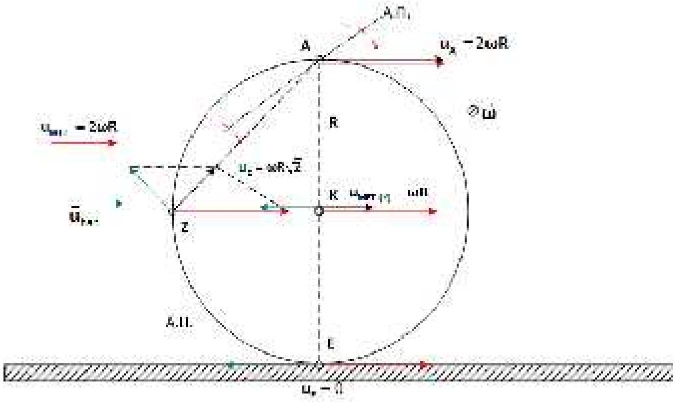
Ισχύουν :

Για την κυκλική κίνηση των σημείων γύρω από το Α:

➢Το Α δεν κάνει κυκλική κίνηση: $u_{tan(A)} = 0$,

➢Το cm κάνει κυκλική κίνηση με ακτίνα r_{cm} =R και μέτρο επιτρόχιας $u_{tan(cm)}$ =ωR

➢Το Ε κάνει κυκλική κίνηση ακτίνας r = 2R και μέτρο επιτρόχιας $u_{tan(E)}$ =ω.2R=2ωR



Προσοχή τώρα : επειδή έχω ζητήσει να έχω μετακίνηση του cm προς τα δεξιά και εφόσον $\vec{u}_E = \vec{0}$ πρέπει ο δίσκος να στρέφεται ωρολογιακά (όπως και στην 1η περίπτωση) και συνολικά θα έχω :

$$\vec{u}_E = \vec{u}_{MET(E).} + \vec{u}_{tan(E).} \overset{\text{μέτρα}}{\Rightarrow} 0 = u_{MET.(E)} - 2\omega R \Rightarrow u_{MET.(E)} = 2\omega R \,.$$

Όμως όλα τα σημεία του δίσκου (πρέπει να) έχουν ίδια μεταφορική ταχύτητα, συνεπώς : $u_{MET.(A)} = u_{MET.(cm)} = u_{MET.(E)} = 2\omega R$, με φορά προς τα δεξιά.

Για την (συνολική) ταχύτητα των σημείων θα έχω :

➢ Για το Ε: $\vec{u}_E = \vec{0} \Rightarrow \quad u_E = 0$,

➢ Για το cm: $\vec{u}_{cm} = \vec{u}_{MET(cm).} + \vec{u}_{tan(cm)} \overset{\text{μέτρα}}{\Rightarrow} u_{cm} = u_{MET(cm).} - u_{tan(cm)} \Rightarrow u_{cm} = 2\omega R - \omega R \Rightarrow u_{cm} = \omega R,$ με φορά προς τα δεξιά, και

➢ Για το Α: $\vec{u}_A = \vec{u}_{MET(A).} + \vec{u}_{tan(A)} \Rightarrow u_A = 2\omega R + 0 \Rightarrow u_A = 2\omega R$, με φορά προς τα δεξιά.

///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///---///

3η περίπτωση: <u>Ο Α.Π. διέρχεται από το σημείο Ζ του δίσκου (αντισυμβατική θεώρηση).</u>

Το Ζ είναι στην περιφέρεια του δίσκου και η ακτίνα ΚΖ είναι οριζόντια.

Ισχύουν :

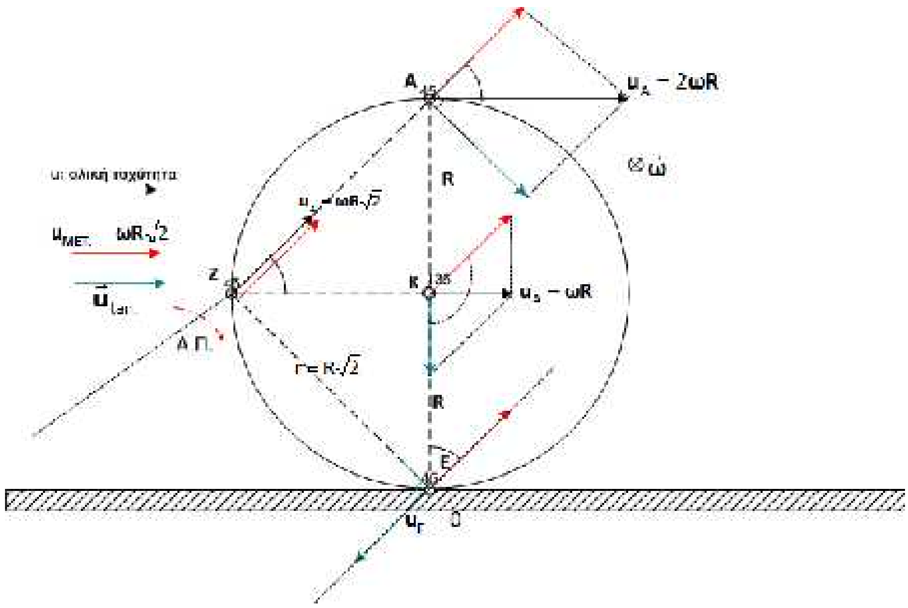
Για την κυκλική κίνηση των σημείων γύρω από το Ζ:

➢Το Ζ δεν κάνει κυκλική κίνηση: $u_{tan(Z)} = 0$,

➢ Τα σημεία Α και Ε κάνουν κυκλική κίνηση ακτίνας (ΑΖ)=(ΕΖ)=r, με την r να υπολογίζεται με πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΚΖΑ : $r^2 = (ZA)^2 + (ZE)^2 \overset{(ZA)=(ZE)=R}{\Rightarrow} r^2 = 2R^2 \Rightarrow r = R\sqrt{2}$, οπότε θα έχουμε : $u_{tan(A)} = u_{tan(E)} = \omega.r = \omega R\sqrt{2}$.

Τα τρίγωνα ΖΚΑ και ΖΚΕ είναι ισοσκελή οπότε $Z\hat{A}K = Z\hat{E}K = 45^\circ$ και επιπλέον

$E\hat{Z}A = 90^\circ$ (η ΑΕ είναι διάμετρος).



➢ Το cm (Κ) κάνει κυκλική κίνηση με ακτίνα r = R και μέτρο ταχύτητας στην κυκλική : $u_{tan(cm)} = \omega R$.

Προσοχή τώρα : επειδή έχω ζητήσει να έχω μετακίνηση του cm προς τα δεξιά και εφόσον $\vec{u}_E = \vec{0}$ πρέπει ο δίσκος να στρέφεται ωρολογιακά (όπως και στην 1η και τη 2η περίπτωση) και συνολικά θα έχω :

Η $\vec{u}_{tan(A)}$ θα είναι κάθετη στη ΖΚ και η $\vec{u}_{tan(E)}$ κάθετη στη ΖΕ με φορά όπως στο σχήμα.

Η $\vec{u}_{tan(cm)}$ πάνω στην ΚΕ με φορά προς το Ε.

Επειδή όμως $\vec{u}_E = \vec{0}$ θα έχουμε $\vec{u}_{MET(E).} = -\vec{u}_{tan(E)}$ και για τα μέτρα τους $u_{MET(E).} = u_{tan(E)} = \omega R\sqrt{2}$

Όλα τα σημεία του δίσκου έχουν ίδια μεταφορική ταχύτητα: $\vec{u}_{MET.(E)} = \vec{u}_{MET.(Z)} = \vec{u}_{MET.(A)} = \vec{u}_{MET.(cm)}$ οπότε και παράλληλες (και κάθετες πχ στην ΕΖ) και με ίσα μέτρα $u_{MET(E).} = u_{MET(Z).} = u_{MET(A).} = u_{MET.(cm)} = \omega R\sqrt{2}$

Για την (συνολική) ταχύτητα των σημείων θα έχω :

➢ Για το Ε: $\vec{u}_E = \vec{0} \Rightarrow \quad u_E = 0$,

➢ Για το Ζ (που είναι πάνω στον Α.Π.): $\vec{u}_Z = \vec{u}_{MET(Z).} + \vec{u}_{tan(Z)} \Rightarrow u_Z = u_{MET(Z).} + 0 \Rightarrow u_Z = \omega R\sqrt{2}$, πάνω στη ΖΑ, με φορά προς το Α (κάθετη στην ΕΖ, στο Ζ).

➢ Για το Α (εδώ υπάρχει ομορφιά): Η $\vec{u}_{MET(A).}$ είναι πάνω στη ΖΑ, η $\vec{u}_{tan(A)}$ είναι κάθετη στη ΖΑ, συνεπώς $\vec{u}_{tan(A)} \perp \vec{u}_{MET(A).}$, Οπότε $\vec{u}_A = \vec{u}_{MET(A).} + \vec{u}_{tan(A).} \Rightarrow$

$$u^2{}_A = u^2{}_{MET(A).} + u^2{}_{tan(A).} = 2u^2{}_{MET(A)} \Rightarrow u_A = u_{MET(A)}\sqrt{2} \overset{u_{MET(A)}=\omega R\sqrt{2}}{\Longrightarrow} u_A = (\omega R\sqrt{2}).\sqrt{2} \Rightarrow \quad u_A = 2\omega R$$

και με διεύθυνση οριζόντια (το τετράπλευρο των ταχυτήτων είναι τετράγωνο, άρα η $\vec{u}_A$ είναι διχοτόμος της $\measuredangle \vec{u}_{MET(A)}\hat{A}\vec{u}_{tan(A)}$).

➢ Για το cm (και εδώ ομορφιά ☺):

Η $\vec{u}_{MET(cm).}$ σχηματίζει γωνία 135° με τη $\vec{u}_{tan(cm)}$, οπότε για το μέτρο της ταχύτητας του έχουμε:

$$u_{cm} = \sqrt{u^2_{MET.} + u^2_{tan} + 2u_{MET.}.u_{tan}.\cos(135^\circ)} = \sqrt{(\omega R\sqrt{2})^2 + (\omega R)^2 - 2\omega R\sqrt{2}.\omega R.(\frac{\sqrt{2}}{2})} \Rightarrow u_{cm} = \omega R$$

Συμπέρασμα: Στην κινηματική μελέτη του δίσκου δεν έχει καμία σημασία από που θα θεωρήσουμε ότι διέρχεται ο άξονας περιστροφής. Το γεγονός ότι εμείς επιλέγουμε να σπάμε την κίνηση σε μεταφορική και σε στροφική γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το cm, έχει να κάνει με τη δυναμική μελέτη, την εφαρμογή δηλαδή του 1ου και 2ου νόμου Euler.

Νίκος Κορδατζάκης

(Νί.Κο.)