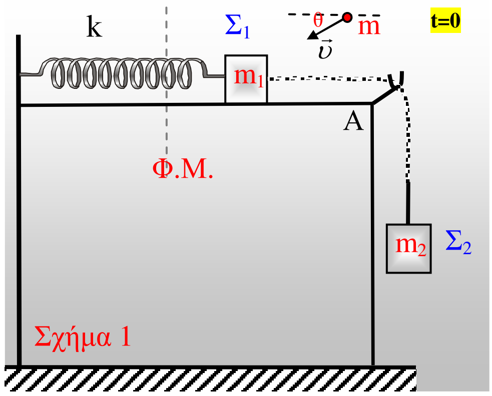
Δύο σώματα ταλαντώνονται ύστερα από μια ιδιαίτερη κρούση…



Το σώμα $Σ_1$ του διπλανού σχήματος έχει μάζα m_1=1,9kg και είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=500N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε τοίχο. Από την άλλη μεριά του σώματος $Σ_1$ μέσω ιδανικού μη εκτατού σχοινιού δένουμε το σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=3kg και το σύστημα που προκύπτει αρχικά ισορροπεί. Ο οδηγός του σχοινιού που βρίσκεται στη γωνία Α δεν εμφανίζει τριβές με αυτό. Κάποια στιγμή που θεωρούμε t=0 ένα βλήμα μάζας m=100g κινείται με ταχύτητα μέτρου υ=200m/s που σχηματίζει γωνία θ=60^o με την οριζόντια διεύθυνση συγκρούεται πλαστικά με το σώμα $Σ_1$.

i) Να βρείτε την αρχική επιμήκυνση ℓ_0 του ελατηρίου και να εξετάσετε κατά πόσο επηρεάζει το βάρος w_1 του σώματος την θέση ισορροπίας.

ii) Να βρείτε την ταχύτητα των σωμάτων του συστήματος αμέσως μετά την κρούση.

iii) Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα ($Σ_1$-βλήμα) εκτελεί αρμονική ταλάντωση.

iv) Να βρείτε την εξίσωση της κίνησης του συσσωματώματος ($Σ_1$-βλήμα) και του σώματος $Σ_2$.

v) Αν το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_{θρ}$=60N να βρείτε αν το νήμα αρχικά χαλαρώνει ή κόβεται και ποια είναι η ταχύτητα των σωμάτων τη στιγμή αυτή.

vi) Να βρείτε το νέο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος ($Σ_1$-βλήμα) στηριζόμενοι στο ερώτημα ***v)*** και την νέα εξίσωσης ταλάντωσής του.

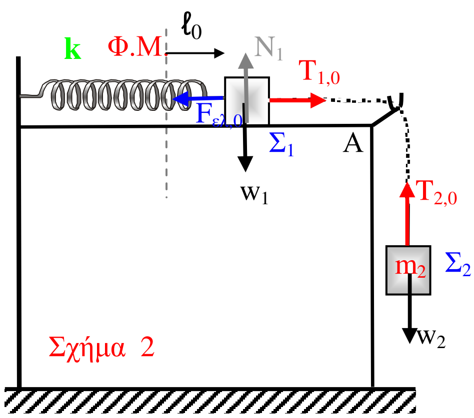
vii) Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης των σωμάτων ($Σ_1$-βλήμα) από τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση έως ότου μηδενιστεί η ταχύτητά τους για $1^η$ φορά. Ως σημείο αναφοράς να θεωρείστε την αρχική θέση ισορροπίας των σωμάτων πριν την κρούση.

Θεωρείστε θετική φορά για τις κινήσεις των σωμάτων τη φορά κίνησης που έχουν μετά την κρούση. Η κρούση διαρκεί σχεδόν ακαριαία, το σχοινί μένει συνεχώς τεντωμένο και τα σώματα δεν αλλάζουν θέση κατά τη διάρκειά της. Οι ωθήσεις των εξωτερικών δυνάμεων είναι πολύ μικρότερες συγκριτικά με τις εσωτερικές.

Δίνεται g=10m/s^2, √0.0136=0.12, √10=π, ημ(θ)=1/3⇒θ≃π/10rad

Απάντηση

i)



Από την ισορροπία του κάθε σώματος προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F}_2=\vec{0}\overset{(+)\uparrow}{\Rightarrow} T_{2,0}-w_2=0\Rightarrow T_{2,0}=w_2 \quad (1)$$

Επειδή το σχοινί είναι αβαρές και μη εκτατό ασκεί στα άκρα του ίσες κατά μέτρο δυνάμεις.

$$T_{1,0}=T_{2,0} \quad (2)$$

$$\Sigma\vec{F}_1=\vec{0}\overset{\leftarrow(+)}{\Rightarrow} F_{ελ,0}-T_{1,0}=0\Rightarrow T_{1,0}=k\ell_0 \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}} w_2=k\ell_0\Rightarrow$$

$$\ell_0=\frac{m_2 g}{k}\Rightarrow \boldsymbol{\ell_0=0,06m}$$

Το βάρος του σώματος $Σ_1$ δεν συμμετέχει στην επιμήκυνση του ελατηρίου και δεν επηρεάζει την θέση ισορροπίας του συστήματος όπως φαίνεται από τη σχέση $\ell_0 = \frac{m_2 g}{k}$.

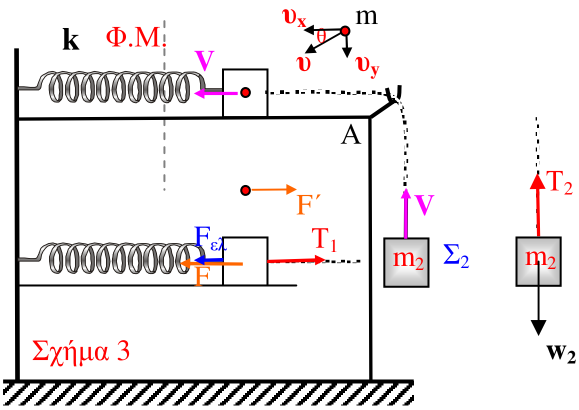
ii)

Στο σύστημα δεν διατηρείται η ορμή του συστήματος σε κανέναν άξονα. Μία πρώτη σκέψη θα ήταν να εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ορμής στο σώμα $Σ_1$ και το βλήμα στον οριζόντιο άξονα. Εξαιτίας όμως της σύζευξης των σωμάτων μέσω του σχοινιού, η ώθηση της τάσης T_1 είναι μεγάλη και δεν μπορούμε να την παραλείψουμε. Ταυτόχρονα κινείται και το $Σ_2$ μέσω της τάσης T_2.

Επειδή το σχοινί είναι μη εκτατό, όλα τα σημεία του κάθε στιγμή θα έχουν ίδιο μέτρο ταχύτητας και ίδιο μέτρο επιτάχυνσης. Έτσι στο τέλος της κρούσης αλλά και κάθε στιγμή όλα τα σώματα του συστήματος θα έχουν ίδια ταχύτητα.

Εφαρμόζουμε τη γενικευμένη μορφή του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα για το κάθε σώμα στον άξονα που επιτρέπεται η κίνηση του κατά τη διάρκεια της κρούσης. Στο σχήμα 3 έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις κατά μήκος της κίνησης των σωμάτων.

Παραλείπουμε την ώθηση της δύναμης του ελατηρίου και την ώθηση του βάρους του σώματος $Σ_2$, συγκρινόμενες με τις ωθήσεις των εσωτερικών δυνάμεων είναι πολύ μικρότερες.



Σχήμα 3

Σώμα $Σ_1$

$$\Sigma \vec{F}_{1x} = \frac{\Delta \vec{P}_1}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{T}_1 + \vec{F} = \frac{\vec{P}_{1,\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{P}_{1,\alpha\rho\chi.}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{T}_1 + \vec{F} = \frac{\vec{P}_{1,\tau\varepsilon\lambda.}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda}\Delta t + \vec{T}_1\Delta t + \vec{F}\Delta t = \vec{P}_{1,\tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda}\Delta t + \vec{T}_1\Delta t + \vec{F}\Delta t = \vec{P}_{1,\tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow \vec{T}_1\Delta t + \vec{F}\Delta t = \vec{P}_{1,\tau\varepsilon\lambda.} \xRightarrow{\leftarrow(+)}$$

$$-T_1\Delta t + F\Delta t = m_1 V \quad (3)$$

Βλήμα m

$$\Sigma \vec{F}_{B,x} = \frac{\Delta \vec{P}_{B,x}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F}' = \frac{\vec{P}_{Bx,\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{P}_{Bx,\alpha\rho\chi.}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\vec{F}'\Delta t = \vec{P}_{Bx,\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{P}_{Bx,\alpha\rho\chi.} \xRightarrow{\leftarrow(+)}$$

$$-F'\Delta t = mV - m\upsilon_x \quad (4)$$

Σώμα $Σ_2$

$$\Sigma \vec{F}_y = \frac{\Delta \vec{P}_2}{\Delta t} \Rightarrow \vec{T}_2 + \vec{w}_2 = \frac{\vec{P}_{2,\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{P}_{2,\alpha\rho\chi.}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\vec{T}_2 + \vec{w}_2 = \frac{\vec{P}_{2,\tau\varepsilon\lambda.}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{T}_2\Delta t + \vec{w}_2\Delta t = \vec{P}_{2,\tau\varepsilon\lambda.} \xRightarrow{\uparrow(+)}$$

$$T_2\Delta t - w_2\Delta t = m_2 V \Rightarrow T_2\Delta t = m_2 V \quad (5)$$

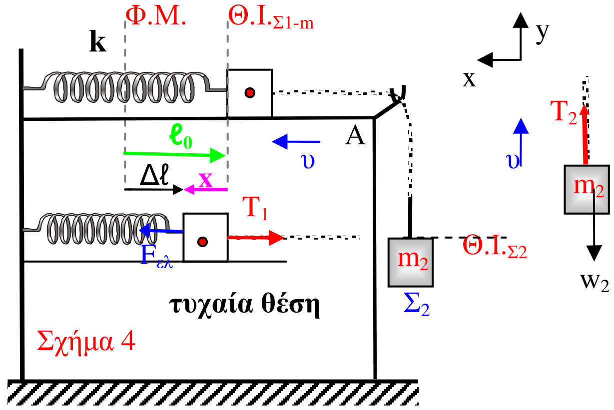
Οι δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{F}'$ αποτελούν ζεύγος δράσης – αντίδρασης. $|\vec{F}|=|\vec{F}'|$.
Λαμβάνοντας ότι οι τάσεις έχουν ίδιο μέτρο προσθέτουμε τις σχέσεις 3, 4, 5 και καταλήγουμε:

$$-T_1\Delta t + F\Delta t - F'\Delta t + T_2\Delta t = m_1V + mV - m\upsilon_x + m_2V \Rightarrow$$
$$0 = m_1V + mV - m\upsilon_x + m_2V \Rightarrow (m_1+m+m_2)V = m\upsilon_x \Rightarrow$$
$$V = \frac{m\upsilon_x}{m_1+m+m_2} = \frac{0{,}1\cdot 100}{5} \Rightarrow \boldsymbol{V=2m/s}$$

iii)

Η θέση ισορροπίας του συστήματος δεν αλλάζει με την εισχώρηση του βλήματος.

Έστω σε μία τυχαία θέση τα σώματα του συστήματος και οι φορές των ταχυτήτων τους όπως φαίνεται στο σχήμα 4.



Στην τυχαία θέση x

Για το σώμα (**Σ_1–βλήμα**)

$$\Sigma\vec{F}_{1,m} = (m_1+m)\vec{\alpha}_1 \xRightarrow{(+)\leftarrow} F_{\varepsilon\lambda} - T_1 = (m_1+m)\alpha_1 \quad (6)$$

Για το σώμα **Σ_2**

$$\Sigma\vec{F}_2 = m_2\vec{\alpha}_2 \xRightarrow{(+)\uparrow} T_2 - w_2 = m_2\alpha_2 \quad (7)$$

Προσθέτουμε την (6) και την (7) λαμβάνοντας υπόψη ότι $m_2g=k\ell_0$ και $\alpha_1=\alpha_2$ παίρνουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda} - w_2 = (m_1+m+m_2)\alpha \Rightarrow k\Delta\ell - m_2g = (m_1+m+m_2)\alpha \Rightarrow$$
$$k(\ell_0 - x) - m_2g = (m_1+m+m_2)\alpha \Rightarrow$$
$$-kx = (m_1+m+m_2)\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{k}{m_1+m+m_2}x \quad (8)$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το σώμα Σ_1 και το βλήμα δίνει:

$$\Sigma F_{1,m} = -\frac{(m_1+m)\mathrm{k}}{m_1+m+m_1}x = -200x \Rightarrow \boldsymbol{\Sigma F_{1,m} = -200x}$$

Άρα το σώμα Σ_1 και το βλήμα κάνουν αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς **D_1=200N/m** και συχνότητα **$\omega_1=\sqrt{(D_1/m_{1,m})}$=10r/s**

iv)

Επειδή η θέση ισορροπίας δεν μεταβάλλεται η ταχύτητα αμέσως μετά την κρούση θα είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του συστήματος (Σ_1–βλήμα).

$V=\omega_1A_1 \Rightarrow 2=10A \Rightarrow A_1=0{,}2$m

Επιπλέον τα σώματα ξεκινούν ταλάντωση κινούμενα προς την θεωρούμενη θετική φορά και έτσι η απομάκρυνση από τη Θ.Ι. θα είναι:

x_1 =0.2ημ(10t), (S.I.)

Το σώμα $Σ_2$ κινείται στον κατακόρυφο άξονα y. Επειδή κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σχοινιού έχουν ίδιο μέτρο ταχύτητας και το σχοινί είναι μη εκτατό, η απόσταση που διανύει το κάθε σώμα είναι ίδια δηλ. $|\vec{x}|=|\vec{y}|$

Έτσι η επιτάχυνση του σώματος $Σ_2$ εκφράζεται ως $\alpha=-\dfrac{k}{m_1+m+m_2}y$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το $Σ_2$ δίνει $\Sigma F_2=-\dfrac{m_2\,\mathrm{k}}{m_1+m+m_1}y=-300y \Rightarrow \boldsymbol{\Sigma F_2 = -300y}$

Που σημαίνει ότι και το $Σ_2$ εκτελεί αρμονική ταλάντωση με ίδιο πλάτος Α και γωνιακή συχνότητα $ω_2=\sqrt{(D_2/m_2)}=10$r/s και η εξίσωσή απομάκρυνσης από τη Θ.Ι. είναι:

$y_1 = 0.2ημ(10t)$, (S.I.)

v)

$$\Sigma\vec{F}_2=-D_2\vec{y}\xRightarrow{(+)\uparrow}\mathrm{T}_2-w_2=-D_2y\Rightarrow \mathrm{T}_2=w_2-D_2y\Rightarrow \boldsymbol{T_2 = 30 - 300y}$$

$T_{θρ}=60N \Rightarrow T_2=60N \Rightarrow 30-300y=60 \Rightarrow -300y=30 \Rightarrow y=-0.1m$

Το σχοινί κόβεται κάτω από τη Θ.Ι. του σώματος m_2 σε απόσταση d=0.1m από αυτή.

Στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης η τάση του νήματος ισούται με $T_2=-20N$. Αυτό δείχνει ότι έχει αλλάξει η φορά της. Κάτι τέτοιο όμως δεν μπορεί να συμβεί αφού το νήμα μόνο έλκει. Συνεπώς το νήμα έχει χαλαρώσει σε μια προηγούμενη θέση όπου η τάση μηδενίζεται.

$T_2=0 \Rightarrow 30-300 \Rightarrow y=0.1m$

Επειδή αρχικά το σώμα κινείται προς τα θετικά το νήμα πρώτα θα χαλαρώσει.
Στη θέση αυτή η εξίσωση της απομάκρυνσης δίνει

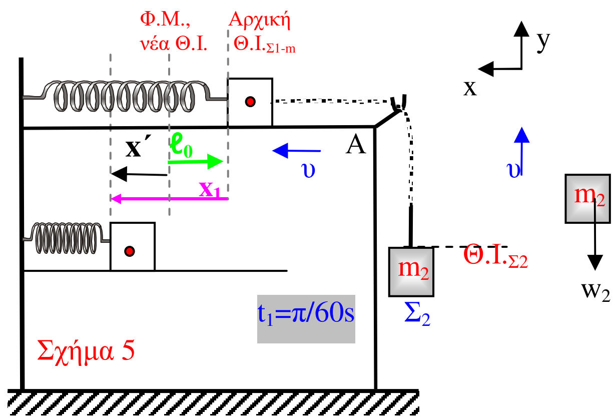
$y_1=0,1 \Rightarrow 0.2ημ(10t)=0.1 \Rightarrow ημ(10t)=ημ(π/6) \Rightarrow$

για 1η φορά $10t=π/6 \Rightarrow$ **$t_1=π/60$s** και

θα έχει ταχύτητα $υ_1=2συν(π/6) \Rightarrow$ **$υ_1=\sqrt{3}$ m/s**. Την ίδια ταχύτητα θα έχει και το σύστημα ($Σ_1$–βλήμα).

vi) Μετά την χαλάρωση του νήματος τα σώματα $Σ_1$-βλήμα ξεκινούν απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά D=k=500N/m με την θέση ισορροπίας να είναι ίδια με τη θέση στο φυσικό μήκος του ελατηρίου. Η γωνιακή συχνότητα **$ω' =\sqrt{(k/m_{1,m})}=5\sqrt{10}$ r/s**

Το σύστημα $Σ_1$-βλήμα ξεκινά ταλάντωση από τη θέση $x'=(x_1-\ell_0)=0,04$m με ταχύτητα $υ=\sqrt{3}$ m/s. Βλ. σχήμα 5



Από τη διατήρηση ενέργειας της νέας ταλάντωσης των σωμάτων $Σ_1$-βλήμα έχουμε:

$$E' = \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{1}{2}m_{1,m}\upsilon^2 \Rightarrow \frac{1}{2}k\mathrm{A}'^2 = \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{1}{2}m_{1,m}\upsilon^2$$

$$500\mathrm{A}'^2 = 500 \cdot 0,04^2 + 2\sqrt{3}^2 \Rightarrow$$

$$500\mathrm{A}'^2 = 6,8 \Rightarrow \mathrm{A}'^2 = 0,0136 \Rightarrow \boldsymbol{A' = 0.12m}$$

Για Δt=0, x΄=0.04m⇒0,12ημ(θ)=0,04⇒ημ(θ)=1/3⇒θ=π/10rad. Η εξίσωση της απομάκρυνσης από την καινούργια θέση ισορροπίας είναι:

$$x' = 0.12\eta\mu(5\sqrt{10}\Delta t + \frac{\pi}{10}) \Rightarrow \boldsymbol{x' = 0.12\eta\mu\left[5\sqrt{10}(t - t_1) + \frac{\pi}{10}\right]}\ \mathbf{t \geq t_1,\ S.I.}$$

vii)

Το Σ_2 από τη στιγμή που χαλαρώνει το νήμα και μετά εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω. Το σώμα Σ_2 έως ότου σταματήσει στιγμιαία θα έχει λυγίσει σχοινί μήκους Δy όσο και το διάστημα που θα διανύσει.

$$\upsilon_2 = \upsilon_{\alpha\rho\chi} - |g|\Delta t \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{3} - 10\Delta t \xrightarrow{\upsilon_2'=0} \Delta t_1 = 0.1\sqrt{3}s$$

$$\Delta y = \upsilon_{\alpha\rho\chi}\Delta t - \frac{1}{2}|g|\Delta t^2 \Rightarrow \Delta y = \sqrt{3}\Delta t - 5\Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t_1 = 0.1\sqrt{3}s} \Delta y = 0.15m$$

Το σύστημα Σ_1–βλήμα θα σταματήσει στιγμιαία στην ακραία θέση διανύοντας απόσταση d=A΄- x΄=0,08m. Το χρονικό διάστημα που θα σταματήσει προκύπτει από την εξίσωση x΄

$$0.12 = 0.12\eta\mu(5\sqrt{10}\Delta t + \frac{\pi}{10}) \Rightarrow \eta\mu(5\sqrt{10}\Delta t + \frac{\pi}{10}) = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

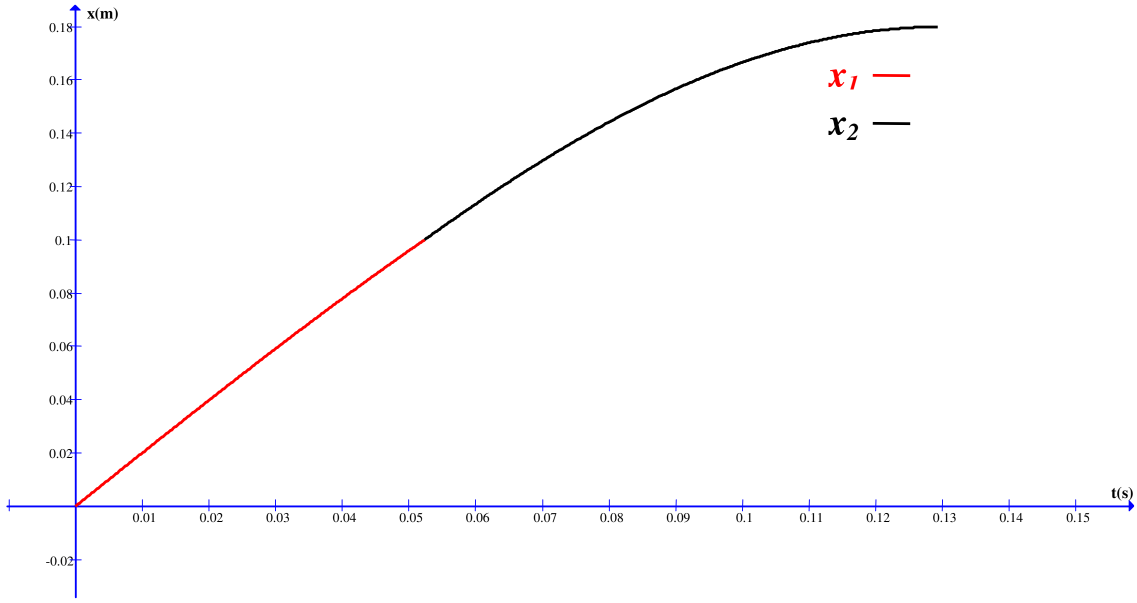
για 1^{η}φορά $5\sqrt{10}\Delta\mathrm{t} = 0,4\pi \Rightarrow \Delta\mathrm{t} = \frac{0,4\pi}{5\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}\pi}{500} = \frac{\sqrt{10}\pi}{125} = \frac{10}{125} \Rightarrow \Delta\mathrm{t}_2 = 0,08\,\mathrm{sec}$

Στο χρόνο αυτό το σώμα Σ_2 διανύει απόσταση $\Delta y' = \sqrt{3} \cdot 0,08 - 5 \cdot 0,08^2 \Rightarrow \Delta y' = 0.106m$

Το σώμα Σ_2 λυγίζει μήκος νήματος περισσότερο από την απόσταση που διανύει το Σ_1-βλήμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία και δεν υπάρχει κίνδυνος να τεντώσει το νήμα. Έτσι έως ότου μηδενιστεί η ταχύτητα του συστήματος Σ_1-βλήμα για πρώτη φορά, τα σώματα κινούνται ανεξάρτητα.
Επιπλέον μπορούμε να προβλέψουμε ότι δεν θα τεντώσει το σχοινί μέχρι να μηδενιστεί για 1^{η} φορά η ταχύτητα του Σ_1-βλήματος διότι: Το σύστημα Σ_1-βλήμα κινείται συνεχώς με αυξανόμενο μέτρο επιβράδυνσης με την αρχική τιμή να είναι α= $\omega'^2 x'$ =10m/s^2, ενώ το Σ_2 κινείται συνεχώς με επιβράδυνση μέτρου g.

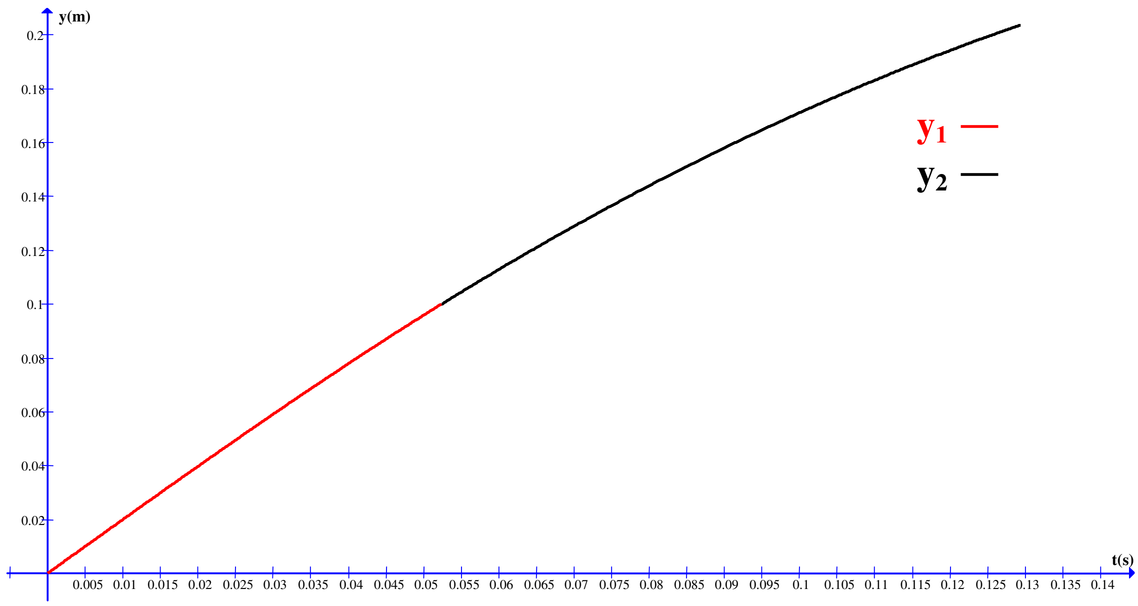
Οι εξισώσεις του συσσωματώματος μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του για 1^{η} φορά είναι:

$$\begin{cases} x_1 = 0.2\eta\mu(10t), \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{60}s \\ x_2 = 0.12\eta\mu\left(5\sqrt{10}(\mathrm{t} - \dfrac{\pi}{60}) + \dfrac{\pi}{10}\right) + 0.06, \quad \dfrac{\pi}{60} \leq t \leq \dfrac{\pi}{60} + 0,08s \end{cases}$$



Οι εξισώσεις του σώματος Σ_2 μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του συσσωματώματος είναι:

$$\begin{cases} y_1 = 0.2\eta\mu(10t), \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{60} s \\ y_2 = 0.1 + \sqrt{3}(t - \dfrac{\pi}{60}) - 5(t - \dfrac{\pi}{60}), \quad \dfrac{\pi}{60} \le t \le \dfrac{\pi}{60} + 0,08s \end{cases}$$



Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com