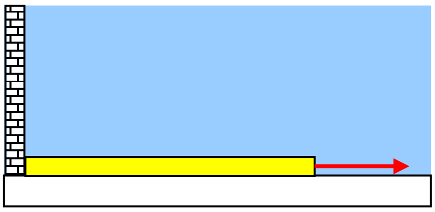
Βρείτε τη δύναμη.

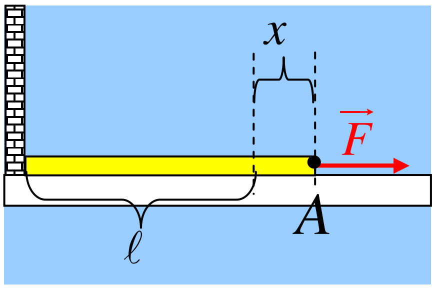


Ένα λάστιχο είναι στερεωμένο σε τοίχο.
Αν θέλω να κινήσω το άλλο του άκρο με σταθερή επιτάχυνση α, ποια δύναμη πρέπει να του ασκήσω;
Γνωστές η σταθερά του λάστιχου και η μάζα του.

Απάντηση:
Θα χρησιμοποιήσω το ότι η κινητική ενέργεια ενός λάστιχου, με το ένα άκρο του στερεωμένο, είναι:
$K = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} m \right) \cdot \upsilon^2$, όπου υ η ταχύτητα του ελεύθερου άκρου του.

Ονομάζουμε ενεργό μάζα την $m_{\varepsilon\nu} = \frac{1}{3} m$

Η απόδειξη παρατίθεται στο τέλος.



Το λάστιχο την στιγμή t έχει επιμηκυνθεί κατά x.
Το άκρο του έχει ταχύτητα υ.

Η δυναμική του ενέργεια είναι $U = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

Η ολική του ενέργεια είναι $E = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + \frac{1}{2} m_{\varepsilon\nu} \cdot \upsilon^2$

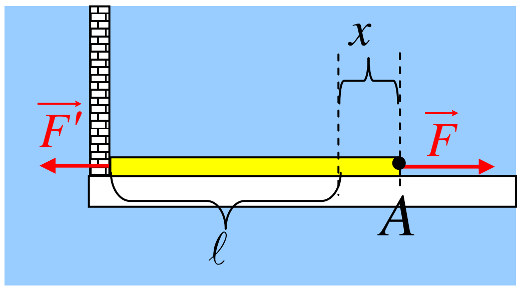
Η δύναμη έχει ισχύν $P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} = F \cdot \upsilon$

Το έργο της δύναμης αυξάνει την ολική ενέργεια του λάστιχου, έτσι η ισχύς της είναι:

$$P = \frac{dE}{dt} \Rightarrow F \cdot \upsilon = \frac{1}{2} k \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m_{\varepsilon\nu} \cdot 2\upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow F \cdot \upsilon = k \cdot x \cdot \upsilon + m_{\varepsilon\nu} \cdot \upsilon \cdot a$$

$$\Rightarrow F = k \cdot x + m_{\varepsilon\nu} \cdot a = k \cdot x + \frac{m}{3} \cdot a$$

Αξίζει να προσεχθούν δύο πράγματα.
Στην αρχή όπου $x = 0$ η δύναμη δεν είναι μηδενική. Την δύναμη αυτήν την ασκεί κάποιος, ίσως το χέρι μου. Αυτός δέχεται δύναμη ίση με $m_{\varepsilon\nu} \cdot a$, παρά το ότι το λάστιχο ουδεμίαν παραμόρφωσιν έχει.
Σε μία τυχαία θέση το χέρι δέχεται δύναμη μεγαλύτερη από $k \cdot x$, δηλαδή την δύναμη που η παραμόρφωση του λάστιχου επιβάλλει.



Οι δυνάμεις στα άκρα ενός λάστιχου δεν είναι ίσες, αν το λάστιχο έχει μάζα. Το κέντρο μάζας του λάστιχου επιταχύνεται, οπότε η δύναμη από το χέρι είναι μεγαλύτερη αυτής από τον τοίχο.
Έτσι

$$F - F' = m \cdot a_{cm} \Rightarrow F' = F - m \cdot a_{cm}$$

Όμως $a_{cm} = \frac{a}{2}$

Οπότε $F' = F - m \cdot a_{cm} = k \cdot x + \frac{m}{3} \cdot a - m \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow F' = k \cdot x - \frac{m}{6} \cdot a$

Δηλαδή όταν $x = 0$ έχουμε ότι $F' = -\frac{m}{6} \cdot a$, δηλαδή ο τοίχος σπρώχνει!!!

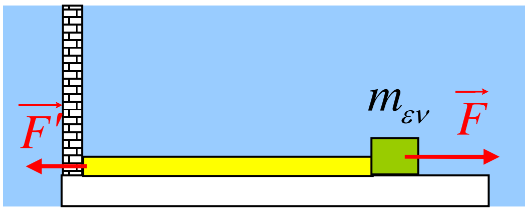
Αυτό μοιάζει χοντράδα. Θα περίμενε κάποιος, όταν $x = 0$ να έχουμε ότι $F' = 0$.
Δηλαδή θα περίμενε η δύναμη του τοίχου να είναι $F' = k \cdot x$.

Κάποιος άλλος θα μπορούσε να περιμένει ότι, αφού το χέρι κάνει δύο δουλειές, να ασκεί δύναμη:

$$F = k \cdot x + \frac{m}{2} \cdot a$$

Ο πρώτος προσθετέος είναι το τμήμα της δύναμης που τεντώνει το ελατήριο και ο δεύτερος το τμήμα που επιταχύνει το κέντρο μάζας του ελατηρίου.

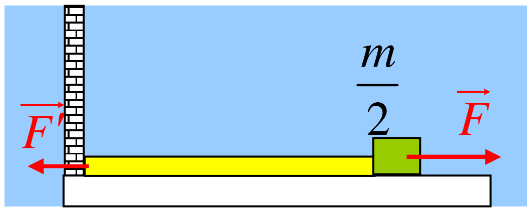
Ένας άλλος κάνει το εξής:



Αντικαθιστά το πραγματικό λάστιχο με ένα ιδανικό λάστιχο και σώμα μάζας $m_{εν} = m/3$.

Λέει φυσικά ότι $F = k \cdot x + \frac{m}{3} \cdot a$ και $F' = k \cdot x$

Δεν λύνει το «μυστήριο» με το κέντρο μάζας.



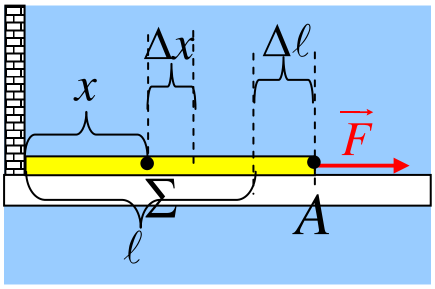
Ένας άλλος πιστεύει ότι το παραπάνω το κάνουμε όταν το λάστιχο ταλαντεύεται.
Όταν δέχεται δύναμη πρέπει να αντικαθίσταται από ιδανικό λάστιχο και μάζα $m/2$.

Έτσι λέει ότι $F = k \cdot x + \frac{m}{2} \cdot a$ και $F' = k \cdot x$

Λύνει το «μυστήριο» με το κέντρο μάζας.

Εμείς δεχόμαστε κάτι από αυτά, ή κάπου έχω κάνει λάθος που δεν βλέπω;

Απόδειξη της σχέσης με την ενεργό μάζα:



Αν ένα λάστιχο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$ τότε τα διάφορα τμήματά του δεν έχουν επιμηκυνθεί το ίδιο.
Από τον νόμο του Hook ξέρουμε ότι:

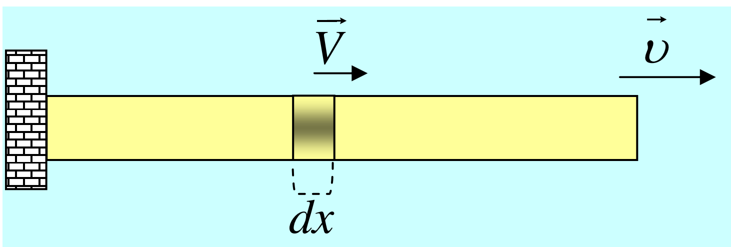
$$\Delta\ell = \frac{1}{E} \cdot \frac{\ell}{S} \cdot F$$

Όπου F η δύναμη, S η διατομή του και E το μέτρο ελαστικότητας.
Προφανώς, επειδή ίδια δύναμη ασκείται σε όλα τα τμήματα του λάστιχου, $\Delta x = \frac{1}{E} \cdot \frac{x}{S} \cdot F$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι $\Delta x = \frac{x}{\ell} \cdot \Delta\ell$.

Με παραγώγιση θα έχουμε ότι $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\ell} \cdot \frac{d\ell}{dt}$ ή $V(x) = \frac{x}{\ell} \cdot \upsilon$

Δηλαδή η ταχύτητα του σημείου Σ συνδέεται με την παραπάνω σχέση με την ταχύτητα υ του άκρου Α.



Κόβουμε σε μικρά κομματάκια το λάστιχο.

Καθένα έχει μάζα $dm = \frac{m}{\ell} \cdot dx$.

Έχει κινητική ενέργεια:

$$dK = \frac{1}{2} dm \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} \cdot \frac{x^2}{\ell^2} \cdot \upsilon^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{m \cdot \upsilon^2}{\ell^3} \cdot x^2 \cdot dx$$

Η ολική κινητική ενέργεια του λάστιχου είναι:

$$K = \frac{1}{2} \frac{m \cdot \upsilon^2}{\ell^3} \cdot \int_0^{\ell} x^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{m \cdot \upsilon^2}{\ell^3} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{1}{2} m_{εν} \cdot \upsilon^2$$