Μη μπορώντας να αποκρύψουμε το στρεφόμενο διάνυσμα

Ένα σώμα μάζας m=2kg εκτελεί αρμονική ταλάντωση της οποίας η εξίσωση προκύπτει από την επαλληλία των εξισώσεων $x_1=20\sqrt{2}\cdot\eta\mu(10t+\pi/4)$S.I., $x_2=25\cdot\eta\mu(10t+\pi/2)$S.I., $x_3=15\sqrt{3}\cdot\eta\mu(10t)$S.I., $x_4=60\cdot\eta\mu(10t+7\pi/6)$S.I. και $x_5=20\cdot\eta\mu(10t+\pi)$ S.I.

i) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος την χρονική στιγμή t=π/20s είναι:

α) $\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|=1000\sqrt{3}\frac{kg\cdot m}{s^2}$ **β)** $\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|=3000\sqrt{3}\frac{kg\cdot m}{s^2}$ **γ)** $\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|=5000\sqrt{2}\frac{kg\cdot m}{s^2}$

ii) Η ενέργεια της ταλάντωσης που προκύπτει είναι:

α) $E= 9\cdot10^4$J **β)** $E=5\cdot10^4$J **γ)** $E=8\cdot10^4$J

iii) Το χρονικό διάστημα Δt στη διάρκεια μιας περιόδου T της ταλάντωσης στο οποίο η κινητική ενέργεια είναι συνεχώς μικρότερη ή ίση από το ¼ της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι:

α) Δt =π/15s **β)** Δt=4π/15s **γ)** Δt = 2π/15s

Απάντηση

i) **Σωστή επιλογή το β**

Από τις παραπάνω εξισώσεις είναι ανέφικτο να γίνει διαδοχικά ¨πρόσθεση¨ ανά δύο, όπως στη θεωρία του σχολικού βιβλίου και να προκύψει μία τελική εξίσωση. Η μεγαλύτερη δυσκολία έγκειται στον προσδιορισμό της γωνίας θ μεταξύ της μιας εξίσωσης και της συνισταμένης τους, $\left(\varepsilon\varphi(\theta)=\frac{A_2\eta\mu(\Delta\varphi)}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi)}\right)$.

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης η απομάκρυνση του σώματος θα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους απομακρύνσεων κάθε στιγμή. Έτσι την t=π/20s θα ισχύει:

$$x=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\overset{t=\pi/20s}{\Longrightarrow}$$

$$x=20\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(\frac{10\pi}{20}+\frac{\pi}{4}\right)+25\cdot\eta\mu\left(\frac{10\pi}{20}+\frac{\pi}{2}\right)+15\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left(\frac{10\pi}{20}\right)+60\cdot\eta\mu\left(\frac{10\pi}{20}+\frac{7\pi}{6}\right)+20\cdot\eta\mu\left(\frac{10\pi}{20}+\pi\right)\Rightarrow$$

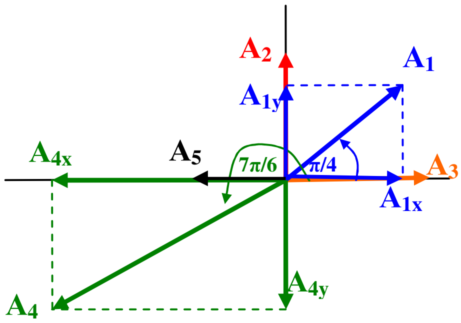
$$x=20\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}\right)+25\cdot\eta\mu(\pi)+15\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)+60\cdot\eta\mu\left(\frac{10\pi}{6}\right)+20\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow$$

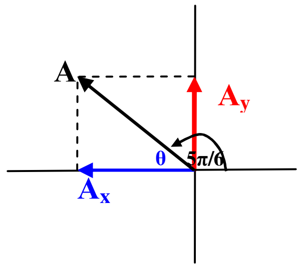
$$x=20-0+15\sqrt{3}-30\sqrt{3}-20\Rightarrow-15\sqrt{3}m$$

Έτσι $\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|=\left|\Sigma\vec{F}\right|=D\left|x\right|=m\omega^2\left|x\right|=2\cdot10^2\cdot15\sqrt{3})=3000\sqrt{3}kg\cdot m/s^2$

ii) **Σωστή επιλογή το α**

Η αρχή της επαλληλίας στην ενέργεια δεν ισχύει. Με κάποιο τρόπο πρέπει να βρούμε το πλάτος της ταλάντωσης που προκύπτει από τη σύνθεση των παραπάνω εξισώσεων. Με βάση το σχολικό βιβλίο γίνεται αναπαράσταση στον κύκλο αναφοράς και το πλάτος της σύνθετης κίνησης προκύπτει όπως η πρόσθεση διανυσμάτων.





Θα κάνουμε αναπαράσταση των πλατών στον κύκλο αναφοράς και θα υπολογίσουμε το πλάτος με ανάλυση σε συνιστώσες. Είναι ανέφικτο να γίνει πρόσθεση ανά δύο εξισώσεων. Σχεδιάζουμε τα πλάτη την t=0. Η στιγμή δεν έχει κάποια σημασία αφού τα πλάτη κρατούν συνεχώς την ίδια γωνία μεταξύ τους.

$A_{1x}=A_1\cdot συν(π/4)=20m$, $A_{1y}=A_1\cdot ημ(π/4)=20m$
$A_{4x}=A_4\cdot συν(π/6)=30\sqrt{3}m$, $A_{4y}=A_4\cdot ημ(π/6)=30m$

$A_x=A_3+A_{1x}-A_{4x}-A_5 \Rightarrow A_x=15\sqrt{3}+20-30\sqrt{3}-20=-15\sqrt{3}m$

$A_y= A_2+A_{1y}-A_{4y} \Rightarrow 25+20-30=15m$

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}=\sqrt{\left(15\sqrt{3}\right)^2+15^2}=\sqrt{900}=30m$$

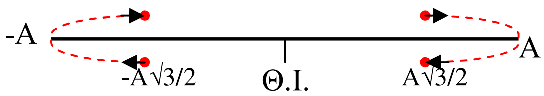
και η ενέργεια $E=½\cdot D\cdot A^2=½\cdot mω^2A^2=9\cdot 10^4J$

iii) **Σωστή επιλογή το α**

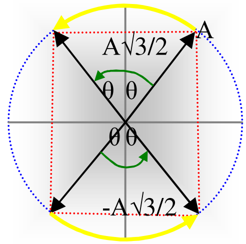
Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος προκύπτει $εφ(θ)=|A_y|/|A_x|=\sqrt{3}/3 \Rightarrow θ=π/6rad$
Συνεπώς η εξίσωση της ταλάντωσης θα είναι της μορφής x=Αημ(ωt+φ)

$$x=30ημ(10t+5π/6) \text{ S.I.}$$

Η κινητική ενέργεια είναι ίση με το ¼ της ολικής στη θέση όπου
$U_T=¾E \rightarrow ½Dx^2=¾\cdot ½\cdot D\cdot A^2 \rightarrow |x|=A\sqrt{3}/2$. Για να είναι η κινητική ενέργεια μικρότερη από το ¼ της ολικής θα πρέπει το σώμα να βρίσκεται σε απόσταση μεγαλύτερη ή ίση από $|x|=A\sqrt{3}/2$ δηλ. στα διαστήματα όπου το σώμα κινείται από τη θέση $x_1=+A\sqrt{3}/2$ με θετική ταχύτητα προς την +Α και γυρίζοντας στην ίδια θέση με αρνητική ταχύτητα και στο διάστημα όπου το σώμα κινείται από τη θέση $x_2=-A\sqrt{3}/2$ με αρνητική ταχύτητα προς την -Α και γυρίζοντας στην ίδια θέση με θετική ταχύτητα.

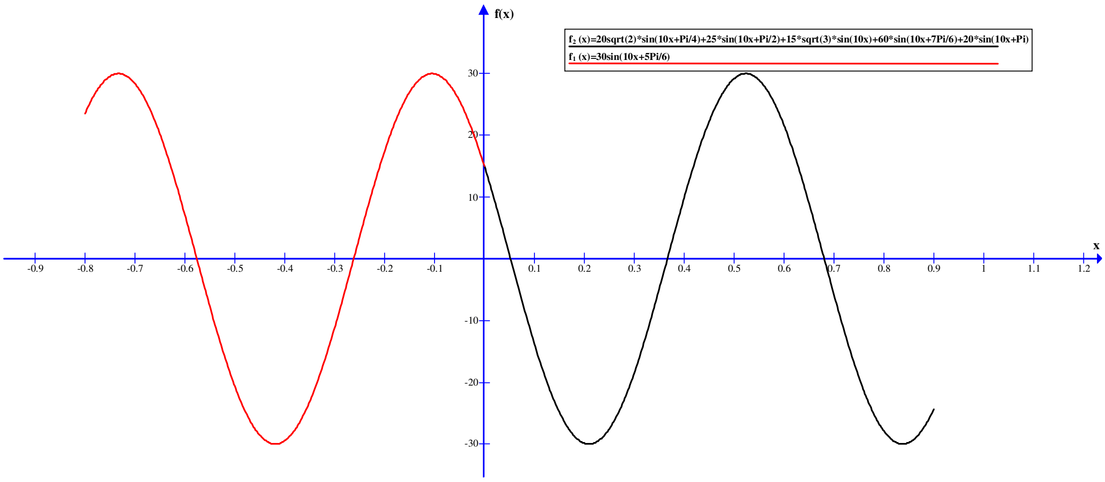


Με τη βοήθεια του κύκλου αναφοράς τα πράγματα απλοποιούνται αρκετά.
Η γωνία θ ισούται με π/6rad, $\sigma\upsilon\nu(\theta)=\sqrt{3}/2 \rightarrow \theta=\pi/6$ rad.
Συνολικά η φάση του σώματος στη διάρκεια μιας περιόδου όπου η κινητική ενέργεια είναι μικρότερη από το ¼ της ολικής ισούται με $\Delta\varphi=4\theta=4\pi/6$rad.
$\Delta\varphi=\omega\Delta t \rightarrow 4\pi/6=10\Delta t \rightarrow \Delta t=4\pi/60\text{sec} \rightarrow \Delta t=\pi/15\text{sec}$



Σχόλια

α) Με τη βοήθεια του προγράμματος graph σχεδιάστηκαν οι συναρτήσεις
$f_1(x)= 30\eta\mu(10x+\pi/6)$ και
$f_2(x)=20\sqrt{2}\cdot\eta\mu(10x+\pi/4)+25\cdot\eta\mu(10x+\pi/2)+5\sqrt{3}\cdot\eta\mu(10x)+60\cdot\eta\mu(10x+7\pi/6)+20\cdot\eta\mu(10x+\pi)$
θέλοντας να επιβεβαιώσουμε ότι ταυτίζονται. Έχουν σχεδιαστεί σε διαφορετικά πεδία ορισμού και η μια είναι συνέχεια της άλλης.



β) Στο τελευταίο ερώτημα θα μπορούσε κάποιος να δουλέψει με τη συνάρτηση $x=30\eta\mu(10t+5\pi/6)$S.I. χωρίς χρήση του στρεφόμενου διανύσματος. Το πλεονέκτημα όμως με χρήση του στρεφόμενου διανύσματος είναι ότι ακόμη και με μη γνωστή την αρχική φάση στην εξίσωση κίνησης θα μπορούσαμε να δουλέψουμε μιας και το χρονικό διάστημα δεν θα επηρεαζόταν από αυτή. Θα μπορούσε βέβαια κάποιος να δουλέψει με την πιο απλή εξίσωση χωρίς αρχική φάση και να ισχυριστεί ότι το χρονικό διάστημα θα είναι το ίδιο αλλά θα έπρεπε να δικαιολογήσει κατάλληλα.

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com