Η εκδίκηση του στρεφόμενου διανύσματος

Ένα σώμα μάζας m=2kg εκτελεί αρμονική ταλάντωση της οποίας η εξίσωση προκύπτει από την επαλληλία των εξισώσεων $x_1=20\sqrt{2}\cdot ημ(10t+π/4)$S.I., $x_2=35\cdot ημ(10t+π/2)$S.I., $x_3=15\sqrt{3}\cdot ημ(10t)$S.I., $x_4=60\cdot ημ(10t+7π/6)$S.I. και $x_5=20\cdot ημ(10t+π)$ S.I.

i) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος την χρονική στιγμή t=π/20s είναι:

α) $\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|=1000\sqrt{3}\,\frac{kg\cdot m}{s^2}$ **β)** $\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|=3000\sqrt{3}\,\frac{kg\cdot m}{s^2}$ **γ)** $\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|=5000\sqrt{2}\,\frac{kg\cdot m}{s^2}$

ii) Η ενέργεια της ταλάντωσης που προκύπτει είναι:

α) $E= 9\cdot 10^4$J **β)** $E=13\cdot 10^4$J **γ)** $E=8\cdot 10^4$J

iii) Το χρονικό διάστημα Δt στη διάρκεια μιας περιόδου T της ταλάντωσης στο οποίο η κινητική ενέργεια είναι συνεχώς μικρότερη ή ίση από το ¼ της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι:

α) Δt =π/15s **β)** Δt=4π/15s **γ)** Δt = 2π/15s

Απάντηση

i) **Σωστή επιλογή το β**

Από τις παραπάνω εξισώσεις είναι ανέφικτο να γίνει διαδοχικά ¨πρόσθεση¨ ανά δύο, όπως στη θεωρία του σχολικού βιβλίου και να προκύψει μία τελική εξίσωση. Η μεγαλύτερη δυσκολία έγκειται στον προσδιορισμό της γωνίας θ μεταξύ της μιας εξίσωσης και της συνισταμένης τους, $\left(εφ(θ)=\frac{A_2ημ(Δφ)}{A_1+A_2συν(Δφ)}\right)$. Επιπλέον το να ασχοληθούμε αλγεβρικά και μέσω ταυτοτήτων να εξάγουμε την εξίσωση μάλλον περιπλέκει τα πράγματα, βλ. σχόλιο 1.

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης η απομάκρυνση του σώματος θα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους απομακρύνσεων κάθε στιγμή. Έτσι την t=π/20s θα ισχύει:

$$x=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \xRightarrow{t=\pi/20s}$$

$$x=20\sqrt{2}\cdot ημ(\frac{10\pi}{20}+\frac{\pi}{4})+35\cdot ημ(\frac{10\pi}{20}+\frac{\pi}{2})+15\sqrt{3}\cdot ημ(\frac{10\pi}{20})+60\cdot ημ(\frac{10\pi}{20}+\frac{7\pi}{6})+20\cdot ημ(\frac{10\pi}{20}+\pi)\Rightarrow$$

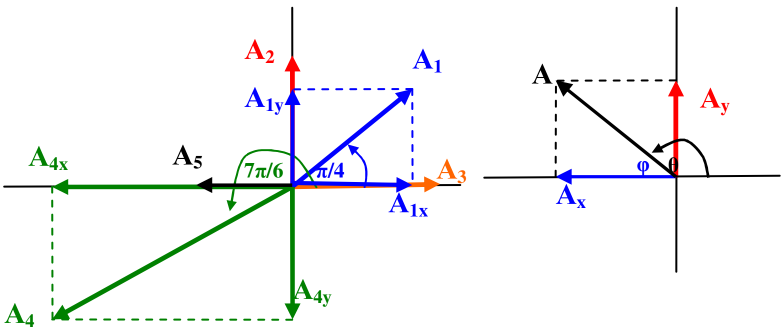
$$x=20\sqrt{2}\cdot ημ(\frac{3\pi}{4})+35\cdot ημ(\pi)+15\sqrt{3}\cdot ημ(\frac{\pi}{2})+60\cdot ημ(\frac{10\pi}{6})+20\cdot ημ(\frac{3\pi}{2})\Rightarrow$$

$$x=20-0+15\sqrt{3}-30\sqrt{3}-20\Rightarrow -15\sqrt{3}m$$

Έτσι $\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|=\left|\Sigma\vec{F}\right|=D\left|x\right|=m\omega^2\left|x\right|=2\cdot 10^2\cdot 15\sqrt{3})=3000\sqrt{3}kg\cdot m/s^2$

ii) **Σωστή επιλογή το α**

Η αρχή της επαλληλίας στην ενέργεια δεν ισχύει. Με κάποιο τρόπο πρέπει να βρούμε το πλάτος της ταλάντωσης που προκύπτει από τη σύνθεση των παραπάνω εξισώσεων.



Θα κάνουμε αναπαράσταση των πλατών στον κύκλο αναφοράς και θα υπολογίσουμε το πλάτος με ανάλυση σε συνιστώσες. Σχεδιάζουμε τα πλάτη την t=0. Η στιγμή δεν έχει κάποια σημασία αφού τα πλάτη κρατούν συνεχώς την ίδια γωνία μεταξύ τους.

$A_{1x}=A_1\cdot συν(π/4)=20m$, $A_{1y}=A_1\cdot ημ(π/4)=20m$

$A_{4x}=A_4\cdot συν(π/6)=30\sqrt{3}m$, $A_{4y}=A_4\cdot ημ(π/6)=30m$

$A_x=A_3+A_{1x}-A_{4x}-A_5 \Rightarrow A_x=15\sqrt{3}+20-30\sqrt{3}-20=-15\sqrt{3}m$

$A_y= A_2+A_{1y}-A_{4y} \Rightarrow 35+20-30=25m$

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}=\sqrt{\left(15\sqrt{3}\right)^2+25^2}=\sqrt{1300}=10\sqrt{13}m$$

και η ενέργεια $E=½\cdot D\cdot A^2=½\cdot mω^2A^2=13\cdot 10^4 J$

iii) **Σωστή επιλογή το α**

Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος προκύπτει $εφ(θ)=A_y/A_x=-\frac{5\sqrt{3}}{9}$. Ο αριθμός δεν αντιστοιχεί σε κάποια γνωστή γωνία.

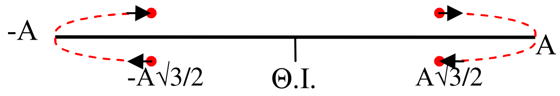
Συνεπώς η εξίσωση της ταλάντωσης θα είναι της μορφής $x=Aημ(ωt+θ)$,

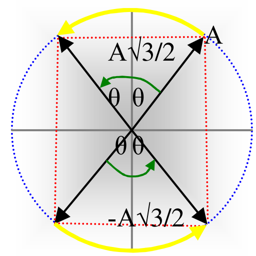
$$x=10\sqrt{13}\cdot ημ(10t+θ) \text{ S.I.}$$

Παρόλο που δεν έχουμε γνώση της γωνίας θ με χρήση του στρεφόμενου διανύσματος η δυσκολία παρακάμπτεται.

Η κινητική ενέργεια είναι ίση με το ¼ της ολικής στη θέση όπου $U_T=¾E \rightarrow ½Dx^2=¾\cdot½\cdot D\cdot A^2 \rightarrow |x|=A\sqrt{3}/2$.

Για να είναι η κινητική ενέργεια μικρότερη ή ίση από το ¼ της ολικής θα πρέπει το σώμα να βρίσκεται σε απόσταση μεγαλύτερη ή ίση από $|x|=A\sqrt{3}/2$ δηλ. στα διαστήματα όπου το σώμα κινείται από τη θέση $x_1=+A\sqrt{3}/2$ με θετική ταχύτητα προς την +A και γυρίζοντας στην ίδια θέση με αρνητική ταχύτητα και στο διάστημα όπου το σώμα κινείται από τη θέση x_2=-A√3/2 με αρνητική ταχύτητα προς την -A και γυρίζοντας στην ίδια θέση με θετική ταχύτητα.





Με τη βοήθεια του κύκλου αναφοράς τα πράγματα απλοποιούνται αρκετά.

Η γωνία θ ισούται με π/6rad, συν(θ)=√3/2→θ=π/6 rad.

Συνολικά η φάση του σώματος στη διάρκεια μιας περιόδου όπου η κινητική ενέργεια είναι μικρότερη από το ¼ της ολικής ισούται με Δφ=4θ=4π/6rad.

Δφ=ωΔt→4π/6=10Δt→Δt=4π/60sec→Δt=π/15sec

Σχόλια

α) Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε αλγεβρικά μέσω τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και να εξαχθεί το πλάτος και η εξίσωση της ταλάντωσης. Μια τέτοια διαδικασία είναι η ακόλουθη:

1. Μετασχηματισμοί με τη σχέση ημ(α+β) = ημα·συνβ + συνα·ημβ

$x_1=20\sqrt{2}\cdot ημ(10t+π/4) = 20ημ10t + 20συν10t$

$x_2=35\cdot ημ(10t+π/2) = 35συν10t$

$x_3=15\sqrt{3}\cdot ημ(10t)$

$x_4=60\cdot ημ(10t+7π/6) = -30\sqrt{3}ημ10t - 30συν10t$

$x_5=20\cdot ημ(10t+π) = -20\cdot ημ10t$

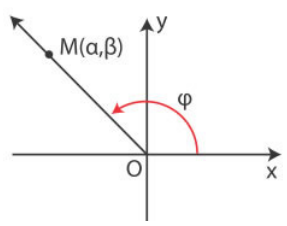
Άρα $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -15\sqrt{3}\cdot ημ10t + 25συν10t$

Από το σχολικό βιβλίο της άλγεβρας β λυκείου [Άλγεβρα Β Λυκείου]

Έστω το σημείο M(α,β) και φ μια από τις γωνίες με αρχική πλευρά Ox και τελική πλευρά OM. Τότε έχουμε:

$$\rho = (\mathrm{OM}) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$και \quad \begin{cases} συνφ=\dfrac{α}{ρ} \ \text{ ή } α=ρσυνφ \\ ημφ=\dfrac{β}{ρ} \ \text{ ή } β=ρημφ \end{cases}$$



Επομένως

αημx + βσυνx= ρσυνφ·ημx + ρημφ·συνx= ρ(συνφ·ημx + ημφ·συνx)= ρημ(x + φ)

Η μελέτη λοιπόν της συνάρτησης f(x) = αημx + βσυνx, α, β ≠ 0 μπορεί να γίνει με τη μελέτη της συνάρτησης f(x) = ρημ(x + φ)

Έτσι ρ=A=$\sqrt{(15\sqrt{3})^2 + 25^2} = 10\sqrt{13}m$

εφθ=β/α= $-\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

2. Πιο εύκολα το πλάτος θα μπορούσε να εξαχθεί ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται και στην εργασία Τρόποι σύνθεσης ταλαντώσεων

Η εξίσωση από την σύνθεση είναι της μορφής $x=Αημ(ωt+θ)$ και της ταχύτητας $υ=υ_{max}συν(ωt+θ)$

$x_1=20\sqrt{2}\cdot ημ(10t+π/4)$S.I., $υ_1=200\sqrt{2}\cdot συν(10t+π/4)$S.I

$x_2=35\cdot ημ(10t+π/2)$S.I., $υ_2=350\cdot συν(10t+π/2)$S.I.

$x_3=15\sqrt{3}\cdot ημ(10t)$S.I., $υ_3=150\sqrt{3}\cdot συν(10t)$S.I.,

$x_4=60\cdot ημ(10t+7π/6)$S.I., $υ_4=600\cdot συν(10t+7π/6)$S.I.

$x_5=20\cdot ημ(10t+π)$ S.I., $υ_5=200\cdot συν(10t+π)$ S.I.,

για t=0

$x_1=20m$, $υ_1=200m/s$

$x_2=35m$, $υ_2=0m/s$

$x_3=0m$, $υ_3=150\sqrt{3}$ m/s

$x_4=-30m$, $υ_4=-300\sqrt{3}$ m/s

$x_5=0m$ $υ_5=-200$ m/s

Έτσι παίρνουμε

$Αημ(θ)= x_1(0)+ x_2(0)+ x_3(0)+ x_4(0)+ x_5(0) \Rightarrow Αημ(θ)=20+35+0-30+0=25m$

$$\rightarrow \mathbf{Αημ(θ)=25\ (1)}$$

$ωΑσυν(θ)= υ_1(0)+ υ_2(0)+ υ_3(0)+ υ_4(0)+ υ_5(0) \Rightarrow 10Ασυν(θ)=200+0+150\sqrt{3}-300\sqrt{3}-200$

$$\rightarrow \mathbf{Ασυν(θ)=-15\sqrt{3}\ (2)}$$

Υψώνουμε στο τετράφωνο την (1) και (2) και προσθέτοντας τες παίρνουμε $Α=10\sqrt{3}m$

Διαιρώντας την (1) και (2) προκύπτει $εφθ=-5\sqrt{3}/9$

β) Το πλεονέκτημα με χρήση του στρεφόμενου διανύσματος είναι στην εύρεση του χρονικού διαστήματος όπου με μη γνωστή την αρχική φάση στην εξίσωση κίνησης, μπορέσαμε και δουλέψαμε στο γ ερώτημα καθώς το χρονικό διάστημα δεν επηρεάζεται από αυτή όπως αποτυπώνεται στον τριγωνομετρικό κύκλο. Θα μπορούσε βέβαια κάποιος να δουλέψει και με την πιο απλή εξίσωση χωρίς αρχική φάση και να ισχυριστεί ότι το χρονικό διάστημα θα είναι το ίδιο αλλά θα έπρεπε να δικαιολογήσει κατάλληλα. Επιπλέον η εύρεση του πλάτους με χρήση αυτού και ανάλυση σε άξονες είναι διαδικασία την οποία ο μαθητής την ξέρει από την Α λυκείου.

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com