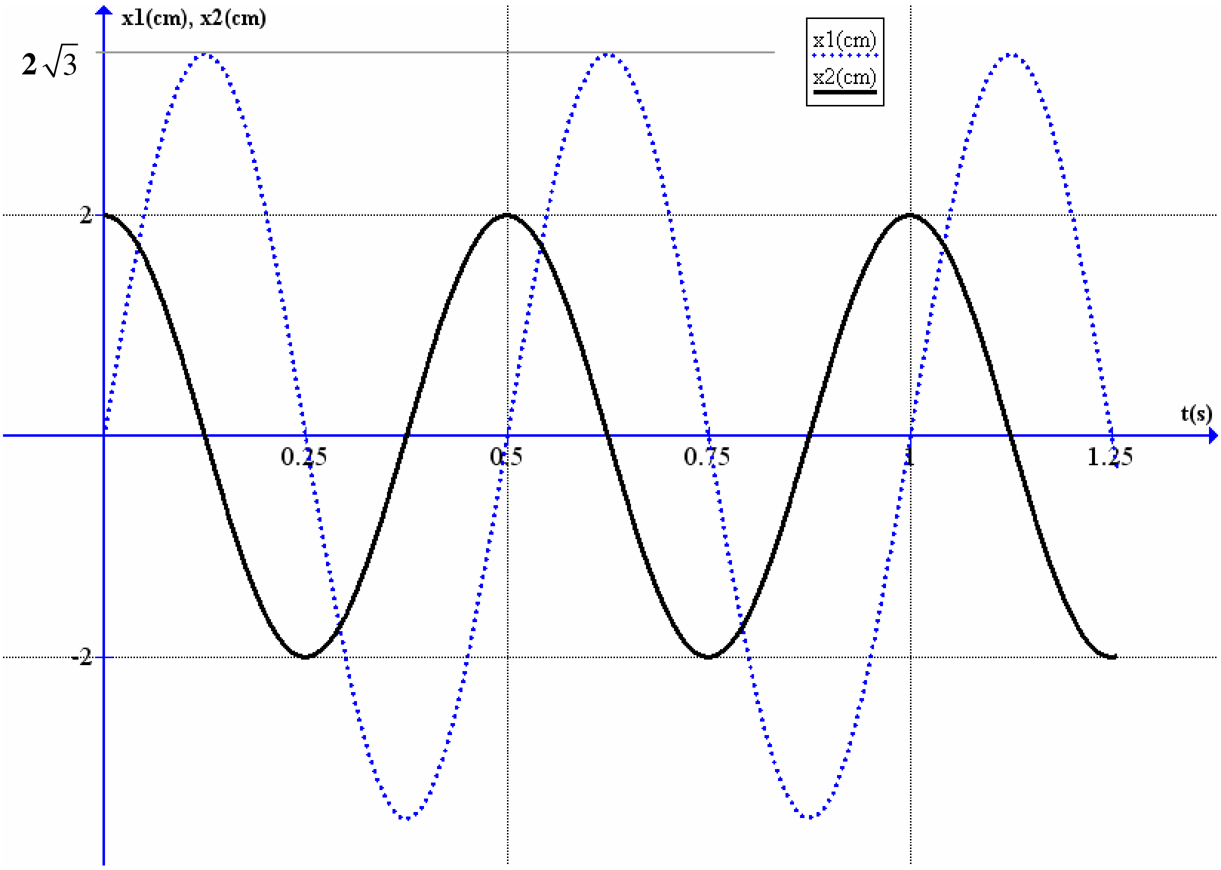
Αποκρύπτοντας το στρεφόμενο διάνυσμα

Ένα σώμα μάζας m =20g εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας και γύρω από το ίδιο σημείο. Οι εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



i) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης από την Θ.Ι. σε συνάρτηση με τον χρόνο για τις δύο επιμέρους ταλαντώσεις.
ii) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης από την Θ.Ι. για την σύνθετη κίνηση.
iii) Την στιγμή t=1/8 s να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής και τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος.
iv) Να βρείτε την απομάκρυνση του σώματος από την Θ.Ι. την πρώτη στιγμή, που αν το σώμα εκτελούσε μόνο την ταλάντωση (1) θα μηδενιζόταν στιγμιαία η ταχύτητά του
v) Να βρείτε ποια θα έπρεπε να είναι η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από την Θ.Ι. για την ταλάντωση (1) έτσι ώστε η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από την Θ.Ι. για την σύνθετη κίνηση να είναι: $x = 2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ x σε cm, t σε s.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$ και εφθ= $-1 \Rightarrow$ θ= 7π/4 rad ή 3π/4 rad
Η αρχική φάση κυμαίνεται μεταξύ 0≤φ<2π rad

Απάντηση

i)
Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι η περίοδος των δύο ταλαντώσεων είναι T=0,5s, ενώ τα πλάτη των ταλαντώσεων είναι $A_1=2\sqrt{3}$ cm και A_2=2cm αντίστοιχα.

Για την εξίσωση x_1 από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι την t=0s ξεκινά από τη Θ.Ι. και κατευθύνεται προς τα θετικά που σημαίνει ότι δεν έχει αρχική φάση. Έτσι η εξίσωση ταλάντωσης x_1 θα είναι:

$x_1 = A_1 \cdot ημ(ωt) \Rightarrow x_1 = 2\sqrt{3} \cdot ημ(4π \cdot t)$, x→cm, t→s

Για την εξίσωση x_2 από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι την t=0s ξεκινά ταλάντωση από την ακραία θετική απομάκρυνση που σημαίνει ότι θα έχει αρχική φάση ίση με π/2rad (με απόδειξη)

Έτσι $x_2 = A_2 \cdot ημ(ωt+φ_0) \Rightarrow x_2 = 2 \cdot ημ(4π \cdot t+π/2)$, x→cm, t→s

ii)
Οι ταλαντώσεις γίνονται γύρω από την ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια Θ.Ι. με ίδια γωνιακή συχνότητα ω=4π rad/s και η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι π/2 rad. Από την σύνθεση αυτή προκύπτει νέα ταλάντωση Α.Α.Τ. της μορφής $x_{1,2}=Aημ(4πt+θ)$ S.I.

$x_1 = 2\sqrt{3} \cdot ημ(4π \cdot t)$, x→ cm, t→ s
και $x_2 = 2 \cdot ημ(4π \cdot t+π/2)$, x→ cm, t→ s

Δφ=π/2rad

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot συν(Δφ)}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2+2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot συν(π/2)}=\sqrt{16} \Rightarrow$$
$$A=4cm$$

$$εφθ=\frac{A_2 ημ(Δφ)}{A_1+A_2 συν(Δφ)}=\frac{2 \cdot ημ(π/2)}{2\sqrt{3}+2συν(π/2)}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow θ=\frac{π}{6}rad$$

Έτσι $x = A \cdot ημ(ωt+θ) \Rightarrow x = 4 \cdot ημ(4πt+π/6)$, x→ cm, t→ s

iii)

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με $\frac{d\vec{P}}{dt}=Σ\vec{F}=-D\vec{x}$

Τη στιγμή t=1/8s το σώμα θα βρίσκεται στην θέση:
$x = 4\cdot ημ(4π/8+π/6)= 4\cdot ημ(2π/3)= 4\cdot ημ(π/3)=4\sqrt{3}/2 \Rightarrow x=2\sqrt{3}\,cm \Rightarrow x=2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}m$

Συνεπώς
$$\Sigma F = -Dx = -m\cdot\omega^2\cdot x = -20\cdot10^{-3}\cdot(4\pi)^2\cdot2\sqrt{3}\cdot10^{-2} = -2\cdot10^{-2}\cdot16\pi^2\cdot2\sqrt{3}\cdot10^{-2} = -64\sqrt{3}\cdot10^{-3}\,\mathrm{N}$$
Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισούται με $\frac{d\mathrm{K}}{dt} = \Sigma\vec{F}\cdot\vec{u}$
Η ταχύτητα του σώματος την στιγμή t=1/8s είναι:
$$υ = υ_{max}\cdot συν(4π/8+π/6)= υ_{max}\cdot συν(2π/3)= -υ_{max}\cdot συν(π/3) \Rightarrow υ= -υ_{max}/2 = -\frac{0,16\pi}{2}$$
$$\Rightarrow υ = -0,08\pi \Rightarrow u = -8\pi\cdot10^{-2}\,m/s$$

Συνεπώς

$$\frac{d\mathrm{K}}{dt} = \Sigma\vec{F}\cdot\vec{u} = -64\sqrt{3}\cdot10^{-3}(-8\pi\cdot10^{-2}) = 512\sqrt{3}\pi\cdot10^{-5}\,J/s$$

iv)
Αν το σώμα εκτελούσε μόνο την ταλάντωση (1) δηλ. την $x_1=2\sqrt{3}\cdot ημ(4π\cdot t)$, x→ cm, t→s θα μηδενιζόταν η ταχύτητά του για 1η φορά την t=T/4 = 1/8s. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε βρει ότι την t=1/8s η συνισταμένη απομάκρυνση είναι $x=2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}m$

v)
Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης:

$$x= x_1+x_2 \Rightarrow 2\sqrt{2}ημ\left(4πt+\frac{π}{4}\right)=2ημ\left(4πt+\frac{π}{2}\right)+x_1 \Rightarrow x_1 = 2\sqrt{2}ημ\left(4πt+\frac{π}{4}\right)-2ημ\left(4πt+\frac{π}{2}\right)\Rightarrow$$
$$x_1= 2\sqrt{2}ημ\left(4πt+\frac{π}{4}\right)+2ημ\left(4πt+\frac{3π}{2}\right)$$

Έτσι έχουμε τη σύνθεση των δύο παραπάνω ταλαντώσεων. Η εξίσωση x_1 είναι της μορφής $x_1=A_1ημ(10t+π/4+θ)$, με $0\le(π/4+θ)<2π$

Δφ=5π/4rad

$$A_1 = \sqrt{A^2+A_2^2+2\cdot A\cdot A_2\cdot συν(\Delta\varphi)} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2+2\cdot2\sqrt{2}\cdot2\cdot συν(5\pi/4)} \Rightarrow$$
$$A_1 = \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow A_1 = 2cm$$
$$εφθ = \frac{A_2 ημ(\Delta\varphi)}{A + A_2 συν(\Delta\varphi)} = \frac{2\cdot ημ(5\pi/4)}{2\sqrt{2}+2συν(5\pi/4)} = \frac{-2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}-2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \Rightarrow$$

$\theta=\frac{7\pi}{4}\text{rad}$ ή $\theta=\frac{3\pi}{4}\text{rad}$

- Αν θ= 7π/4 rad

$$x_1 = A_1\eta\mu\left(4\pi t+\frac{\pi}{4}+\theta\right)=2\eta\mu\left(4\pi t+\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}\right)=2\eta\mu\left(4\pi t+2\pi\right)\Rightarrow x_1=2\eta\mu(10t),\ x\to cm$$

- Αν θ= 3π/4 rad

$$x_1 = A_1\eta\mu\left(4\pi t+\frac{\pi}{4}+\theta\right)=2\eta\mu\left(4\pi t+\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow x_1=2\eta\mu\left(4\pi t+\pi\right),\ x\to cm$$

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης την t=0 η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2=8\pi\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(4\pi\cdot 0+\frac{\pi}{4}\right)+8\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(4\pi\cdot 0+\frac{3\pi}{2}\right)=8\pi\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+0=8\pi\ cm/s$$

Για t=0 οι εξισώσεις που βρήκαμε δίνουν:

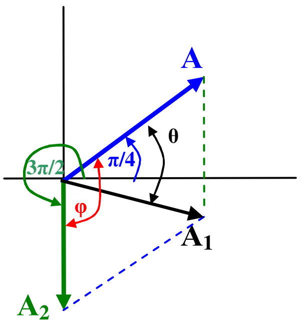
$\upsilon_1=8\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(4\pi\cdot 0\right)=8\pi$ cm/s η πρώτη και η δεύτερη $\upsilon_1=8\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(4\pi\cdot 0+\pi\right)=-8\pi$ cm/s

Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι η $x_1=2\eta\mu\left(4\pi t\right),\ x\to cm$

Σχόλιο

Στο τελευταίο ερώτημα τα πράγματα σαφώς απλοποιούνται με χρήση του στρεφόμενου διανύσματος.

Θα κάνουμε αναπαράσταση των πλατών στον κύκλο αναφοράς. Σχεδιάζουμε τα πλάτη την t=0. Η στιγμή δεν έχει σημασία αφού τα πλάτη κρατούν συνεχώς την ίδια γωνία μεταξύ τους.



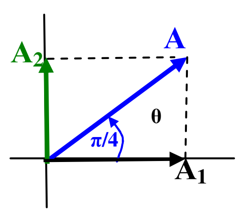
Φαίνεται ξεκάθαρα πως η γωνία της εξίσωσης x_1 που προκύπτει είναι μεταξύ -π/2 και π/4.

Η γωνία μεταξύ του A_2 και του A είναι φ=π/4+|-π/2|=3π/4 rad

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2\eta\mu(\varphi)}{A+A_2\sigma\upsilon\nu(\varphi)}=\frac{2\cdot\eta\mu(3\pi/4)}{2\sqrt{2}+2\sigma\upsilon\nu(3\pi/4)}=\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}-2\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος A και το A_1 θα σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους θ=π/4 rad γι αυτό και η εξίσωση της κίνησης x_1 δεν θα έχει αρχική φάση.

Μην παραπλανηθούμε από το παραπάνω σχήμα καθώς η πρόσθεση του A_1 και A_2 στο παραπάνω σχήμα δεν μπορεί να δώσει το A. Το A προκύπτει από την επαλληλία των εξισώσεων x_1=2ημ(10t) και x_2 = 2·ημ(4π·t+π/2), x→cm, t→s τα πλάτη των οποίων αναπαρίστανται όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com