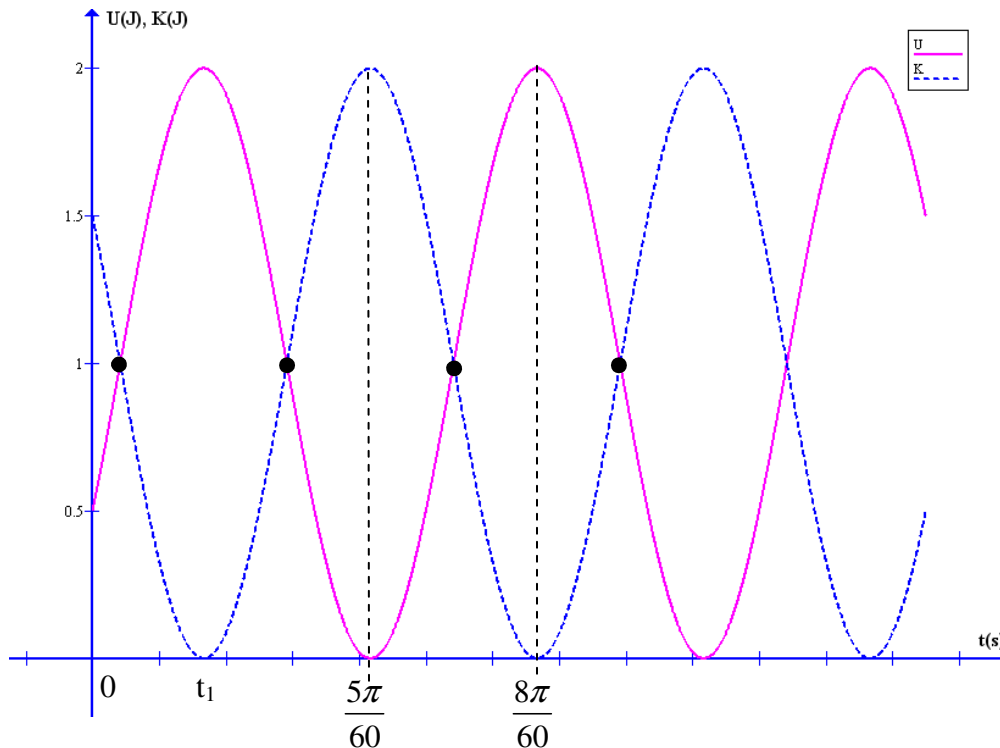


Ένα διάγραμμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο

Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η δυναμική και η κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο ενός σώματος που εκτελεί ΑΑΤ. Η δυναμική ενέργεια παριστάνεται με συνεχή γραμμή και η κινητική ενέργεια από τη διακεκομμένη γραμμή. Αν η μάζα του σώματος είναι $m=1\text{kg}$ και γνωρίζετε ότι την $t=0$ η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι αρνητική να υπολογίσετε:



- i) Την ενέργεια και το πλάτος και της ταλάντωσης.
- ii) Να βρείτε την θέση και την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή $t=0$.
- iii) Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ότι η αρχική φάση παίρνει τιμές από $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$.
- iv) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 που γίνεται για πρώτη φορά μηδέν η κινητική ενέργεια του σώματος καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη στιγμή αυτή.
- v) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές στη διάρκεια της 1^{ης} περιόδου όπου η δυναμική ενέργεια είναι ίση με τα $3/4$ της ολικής ενέργειας.

Απάντηση

- i) Κάθε χρονική στιγμή η ενέργεια της ταλάντωσης είναι σταθερή και ίση με $E=K+U$. Από την χρονική στιγμή μηδέν παίρνουμε $E=K+U=1,5+0,5=2\text{J}$.

Από το διάγραμμα την χρονική στιγμή $t_2=5\pi/60s$ το σώμα έχει μηδενική δυναμική ενέργεια που σημαίνει ότι βρίσκεται στην Θ.Ι. ενώ την $t_3=8\pi/60s$ έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια που σημαίνει ότι είναι σε ακραία θέση. Το χρονικό διάστημα από τη Θ.Ι. σε ακραία θέση είναι ίσο με $T/4$. Έτσι:

$$\frac{T}{4} = \frac{8\pi}{60} - \frac{5\pi}{60} = \frac{3\pi}{60} \Rightarrow \frac{T}{4} = \frac{\pi}{20} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} s$$

$$\Rightarrow \omega = 2\pi/T = 10\pi/s$$

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{4}{100} \Rightarrow A = 0,2m$$

$$D = m\omega^2 = 100N/m$$

ii)

Την $t=0$,

$$U = 0,5J \Rightarrow \frac{1}{2}Dx_1^2 = 0,5 \Rightarrow \frac{1}{2}100x_1^2 = 0,5 \Rightarrow x_1 = \pm 0,1m$$

Επειδή την $t=0$ η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι αρνητική η απομάκρυνση θα είναι θετική. ($a = -\omega^2 x$)

Έτσι $x_1 = +0,1m$

$$K = 1,5J \Rightarrow \frac{1}{2}mu_1^2 = 1,5 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot u_1^2 = 1,5 \Rightarrow u_1 = \pm\sqrt{3}m/s$$

Επειδή μετά την $t=0$ η κινητική ενέργεια μειώνεται και αντίστοιχα η δυναμική αυξάνεται το σώμα πηγαίνει προς ακραία θέση. Την $t=0$ είναι σε θετική απομάκρυνση και έτσι πηγαίνει προς την θέση $+A$ γι' αυτό και η ταχύτητά του είναι θετική.

$$\text{Έτσι } u_1 = \sqrt{3}m/s \quad x = +0,1m$$

iii)

Το ταλαντούμενο σύστημα έχει αρχική φάση φ_0 αφού για $t=0$, $x=0,1m$ και $u=\sqrt{3}m/s$.

Για $t = 0$: $x = +0,1m$ και $u > 0$

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow 0,1 = 0,2\eta\mu(10 \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu(\varphi_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\eta\mu(\varphi_0) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} & (1) \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} & (2) \end{cases} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad \text{και } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

Για $t = 0$ η ταχύτητα είναι θετική δηλ. $u > 0$ και ικανοποιείται μόνο όταν $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad

$$u = u_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{6}) = u_{\max} \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}) > 0 \quad \text{δεκτή}$$

Ενώ για $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad

$$u = u_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot 0 + \frac{5\pi}{6}) = u_{\max} \sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{6}) = -u_{\max} \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}) = -u_{\max} \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \quad \text{απορρίπτεται}$$

Άρα $x = 0, 2\eta\mu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) \quad S.I.$

Και

$$u = 2\sigma\upsilon\nu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) \quad S.I.$$

iv)

Την $t_1 : K=0 \Rightarrow u=0$

$$0 = 2\sigma\upsilon\nu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$10 \cdot t + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 10 \cdot t = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} & (1) \\ 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} & (2) \end{cases} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

• $\kappa = 0$

$$\eta (1) \rightarrow 10 \cdot t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{30} s$$

$$\eta (2) \rightarrow 10 \cdot t = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{15} s \quad \text{απορ.}$$

• για $\kappa = 1, 2 \dots t_i > \frac{\pi}{30} s$

Άρα η χρονική στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα για πρώτη φορά είναι $t_1 = \frac{\pi}{30} s$.

Την στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στην θετική ακραία θέση $x=A=0,2m$.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη δηλ. Από τη γενικευμένη μορφή του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -m\omega^2 A = -1 \cdot 10^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \Sigma F = -20N$$

v)

$$U = \frac{3}{4}E \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3A^2}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}A}{2} \Rightarrow x = \pm 0,1\sqrt{3}m \Rightarrow$$

$$0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) = \pm 0,1\sqrt{3} \Rightarrow \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) = \pm \eta\mu(\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \left| \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \right| = \eta\mu(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \left(\left| \eta\mu(x) \right| = \eta\mu(\theta) \Rightarrow x = \kappa\pi \pm \theta \right)$$

$$10t + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow 10t = \begin{cases} \kappa\pi + \frac{\pi}{6} & (1) \\ \kappa\pi - \frac{3\pi}{6} & (2) \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} \frac{6\kappa\pi + \pi}{60} & (1) \\ \frac{6\kappa\pi - 3\pi}{60} & (2) \end{cases} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

● $\kappa=0$

$$(1) \Rightarrow t = \pi/60 \quad 1^{\text{η}} \text{ φορά}$$

$$(2) \Rightarrow t = -\pi/20s < 0$$

● $\kappa=1$

$$(1) \Rightarrow t = 7\pi/60s \quad 3^{\text{η}} \text{ φορά}$$

$$(2) \Rightarrow t = 3\pi/60s \quad 2^{\text{η}} \text{ φορά}$$

● $\kappa=2$

$$(1) \Rightarrow t = 13\pi/60s > T$$

$$(2) \Rightarrow t = 9\pi/60s \quad 4^{\text{η}} \text{ φορά}$$

X. Αγριόδημος
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com