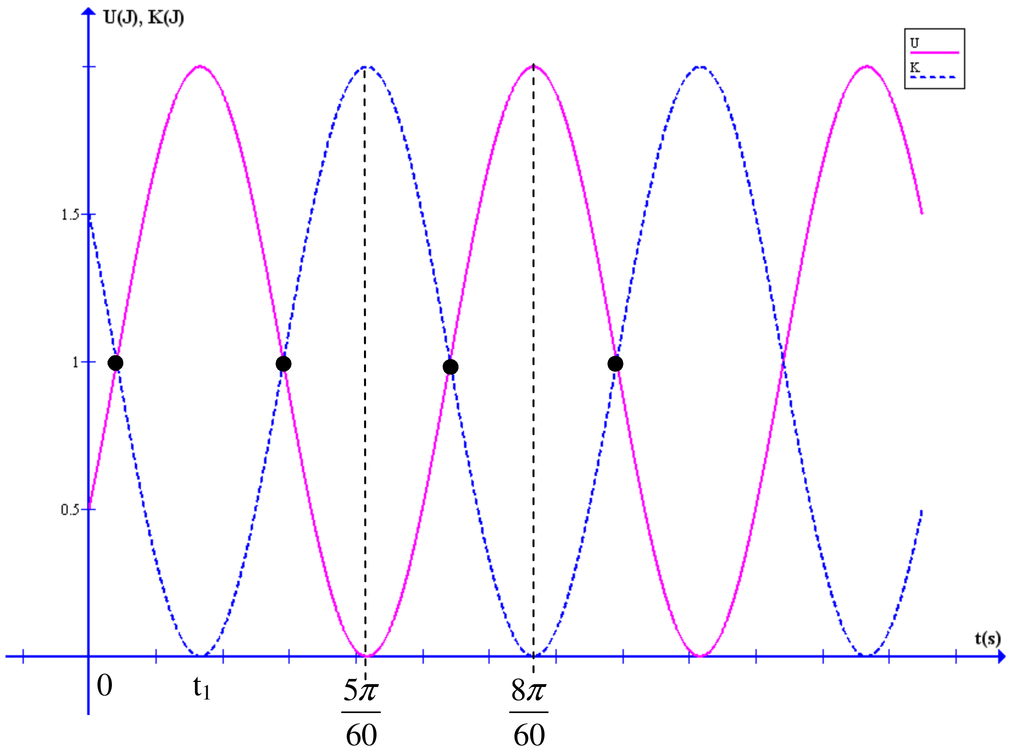
Ένα διάγραμμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο

Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η δυναμική και η κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο ενός σώματος που εκτελεί ΑΑΤ. Η δυναμική ενέργεια παριστάνεται με συνεχή γραμμή και η κινητική ενέργεια από τη διακεκομμένη γραμμή. Αν η μάζα του σώματος είναι m=1kg και γνωρίζετε ότι την t=0 η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι αρνητική να υπολογίσετε:



i) Την ενέργεια και το πλάτος και της ταλάντωσης.
ii) Να βρείτε την θέση και την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή t= 0.
iii) Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ότι η αρχική φάση παίρνει τιμές από $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$.
iv) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 που γίνεται για πρώτη φορά μηδέν η κινητική ενέργεια του σώματος καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη στιγμή αυτή.
v) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές στη διάρκεια της $1^{ης}$ περιόδου όπου η δυναμική ενέργεια είναι ίση με τα 3/4 της ολικής ενέργειας.

Απάντηση

i)

Κάθε χρονική στιγμή η ενέργεια της ταλάντωσης είναι σταθερή και ίση με E=K+U. Από την χρονική στιγμή μηδέν παίρνουμε E= K+U=1,5+0,5=2J.

Από το διάγραμμα την χρονική στιγμή $t_2=5\pi/60s$ το σώμα έχει μηδενική δυναμική ενέργεια που σημαίνει ότι βρίσκεται στην Θ.Ι. ενώ την $t_3=8\pi/60s$ έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια που σημαίνει ότι είναι σε ακραία θέση. Το χρονικό διάστημα από τη Θ.Ι. σε ακραία θέση είναι ίσο με Τ/4. Έτσι:

$$\frac{T}{4}=\frac{8\pi}{60}-\frac{5\pi}{60}=\frac{3\pi}{60}\Rightarrow\frac{T}{4}=\frac{\pi}{20}\Rightarrow \mathrm{T}=\frac{\pi}{5}s$$

$\Rightarrow\omega=2\pi/T=10r/s$

$D=m\omega^2=100N/m$

$$E=\frac{1}{2}DA^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\Rightarrow 2=\frac{1}{2}1\cdot 10^2A^2\Rightarrow A^2=\frac{4}{100}\Rightarrow A=0,2m$$

ii)

Την t=0,

$$U=0,5J\Rightarrow\frac{1}{2}Dx_1^2=0,5\Rightarrow\frac{1}{2}100x_1^2=0,5\Rightarrow x_1=\pm 0,1m$$

Επειδή την t=0 η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι αρνητική η απομάκρυνση θα είναι θετική. ($\alpha=-\omega^2x$)

Έτσι $x_1=+0,1m$

$$K=1,5J\Rightarrow\frac{1}{2}mu_1^2=1,5\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot 1\cdot u_1^2=1,5\Rightarrow u_1=\pm\sqrt{3}m/s$$

Επειδή μετά την t=0 η κινητική ενέργεια μειώνεται και αντίστοιχα η δυναμική αυξάνεται το σώμα πηγαίνει προς ακραία θέση. Την t=0 είναι σε θετική απομάκρυνση και έτσι πηγαίνει προς την θέση +Α γι΄αυτό και η ταχύτητά του είναι θετική.

Έτσι $u_1=\sqrt{3}m/s$ x=+0,1m

iii)

Το ταλαντούμενο σύστημα έχει αρχική φάση φ_0 αφού για t=0 , x=0,1m και u=$\sqrt{3}$ m/s.

Για t = 0: x= +0,1m και u >0

$$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\Rightarrow 0,1=0,2\eta\mu(10\cdot 0+\varphi_0)\Rightarrow\eta\mu(\varphi_0)=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\eta\mu(\varphi_0)=\eta\mu(\frac{\pi}{6})\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}\varphi_0=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\quad(1)\\ \varphi_0=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\quad(2)\end{array}\right.\kappa=0,1,2...\text{ και }0\le\varphi_0<2\pi\Rightarrow$$

$$\varphi_0=\frac{\pi}{6}\text{rad ή }\quad\varphi_0=\frac{5\pi}{6}\text{rad}$$

Για t = 0 η ταχύτητα είναι θετική δηλ. u > 0 και ικανοποιείται μόνο όταν $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$rad

$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{6}) = u_{max}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}) > 0$ δεκτή

Ενώ για $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$rad

$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega \cdot 0 + \frac{5\pi}{6}) = u_{max}\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{6}) = -u_{max}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}) = -u_{max}\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ απορρίπτεται

Άρα $\boxed{x = 0,2\eta\mu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) \quad S.I.}$

Και

$\boxed{u = 2\sigma\upsilon\nu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) \quad S.I.}$

iv)

Την t_1 : K=0⇒u=0

$$0 = 2\sigma\upsilon\nu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$10 \cdot t + \frac{\pi}{6} = \left\langle \begin{array}{l} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow 10 \cdot t = \left\langle \begin{array}{ll} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} & (1) \\ 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} & (2) \end{array} \right. \quad \kappa = 0,1,2...$$

- κ = 0

  η (1) → $10 \cdot t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{30} s$

  η (2) → $10 \cdot t = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{15} s$ απορ.

- για κ = 1,2 … $t_i > \frac{\pi}{30} s$

Άρα η χρονική στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα για πρώτη φορά είναι $t_1 = \frac{\pi}{30} s$.

Την στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στην θετική ακραία θέση x=A=0,2m.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη δηλ.
Από τη γενικευμένη μορφή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -m\omega^2 A = -1 \cdot 10^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \Sigma F = -20N$$

v)

$$U=\frac{3}{4}\mathrm{E}\Rightarrow\frac{1}{2}Dx^2=\frac{3}{4}\frac{1}{2}DA^2\Rightarrow x^2=\frac{3A^2}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}A}{2}\Rightarrow x=\pm 0{,}1\sqrt{3}m\Rightarrow$$

$$0{,}2\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})=\pm 0{,}1\sqrt{3}\Rightarrow\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})=\pm\eta\mu(\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow\left|\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})\right|=\eta\mu(\frac{\pi}{3})\Rightarrow \qquad \left(\left|\eta\mu(x)\right|=\eta\mu(\theta)\Rightarrow x=\kappa\pi\pm\theta\right)$$

$$10\cdot t+\frac{\pi}{6}=\left\langle\begin{matrix}\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3}\\ \kappa\pi-\dfrac{\pi}{3}\end{matrix}\right.\Rightarrow 10\cdot t=\left\langle\begin{matrix}\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6}\quad(1)\\ \kappa\pi-\dfrac{3\pi}{6}\quad(2)\end{matrix}\right.\Rightarrow t=\left\langle\begin{matrix}\dfrac{6\kappa\pi+\pi}{60}\quad(1)\\ \dfrac{6\kappa\pi-3\pi}{60}\quad(2)\end{matrix}\right.\quad\kappa=0,1,2...$$

● κ=0

(1)⇒ t=π/60 **1η** φορά

(2)⇒ t= -π/20s<0

● κ=1

(1)⇒ t=7π/60s **3η** φορά

(2)⇒ t=3π/60s **2η** φορά

● κ=2

(1)⇒ t=13π/60s > T

(2)⇒ t=9π/60s **4η** φορά

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com