ΕΝΑ ΘΕΜΑ Β (2ο μέρος)

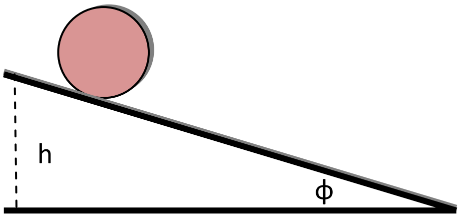
1) Δυο κύλινδροι, ένας συμπαγής (1) και ένας κούφιος (2) (σωλήνας) έχουν ίδιες εξωτερικές διαστάσεις (ακτίνα R , μήκος d) και έχουν ίσες μάζες. Οι κύλινδροι αφήνονται από το ίδιο
ύψος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ και κυλιόνται πάνω σ' αυτό χωρίς να ολισθαίνουν.

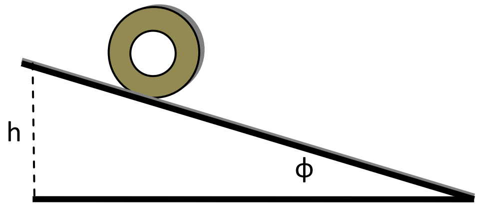
α) για τους χρόνους καθόδου των στερεών στη βάση του κεκλιμένου ισχύει:
1)$\Delta t_1 > \Delta t_2$ 2) $\Delta t_1 < \Delta t_2$ 3)$\Delta t_1 = \Delta t_2$

β) για τους ρυθμούς μεταβολής των στροφορμών τους ισχύει:
1) $dL_1/dt = dL_2/dt$ 2)$dL_1/dt > dL_2/dt$ 3) $dL_1/dt < dL_2/dt$

γ) για τις στροφορμές που αποκτούν σε ίσα χρονικά διαστήματα από τη στιγμή που ξεκίνησαν ισχύει:
1) $L_1 > L_2$ 2) $L_1 = L_2$ 3)$L_1 < L_2$

δ) για τις στροφορμές που έχουν αποκτήσει όταν φτάνουν στη βάση του πλάγιου επιπέδου ισχύει:
1) $L_1 > L_2$ 2) $L_1 = L_2$ 3)$L_1 < L_2$





ε) Το πηλίκο των στροφικών κινητικών ενεργειών $K_{στρ1}/K_{στρ2}$ που αποκτούν τα στερεά όταν φτάνουν στη βάση του κεκλιμένου είναι:
1) μικρότερο του 1 2) μεγαλύτερο του 1 3) ίσο με 1

2) Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία αφού έχουμε απλώσει λιπαντική ουσία πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με αποτέλεσμα τα στερεά να κατέρχονται ολισθαίνοντας παρουσιάζοντας τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ με το πλάγιο επίπεδο κίνησης.

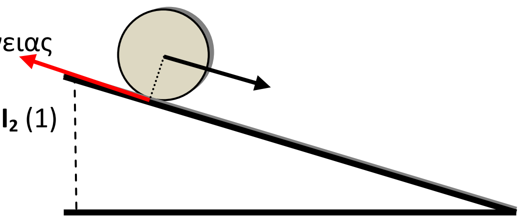
στ) για το πλήθος των περιστροφών που εκτελούν μέχρι να φτάσουν στη βάση του κεκλιμένου ξεκινώντας από το ίδιο ύψος ισχύει
1) $N_1 = N_2$ 2)$N_1 > N_2$ 3) $N_1 < N_2$

ζ) για τα ποσά της θερμότητας που έχουν παραχθεί λόγω της ολίσθησης των στερεών μέχρι να φτάσουν στη βάση του πλάγιου επιπέδου ισχύει:
1) $Q_1 = Q_2$ 2) $Q_1 > Q_2$ 3) $Q_1 < Q_2$

3) Αν γνωρίζουμε ότι για συμπαγή ομογενή κύλινδρο έχουμε $I_{cm}=mR^2/2$ και ότι η ακτίνα της οπής του κούφιου κυλίνδρου (σωλήνα) είναι $r=cR$ όπου $0<c<1$ να υπολογιστεί το πηλίκο των ροπών αδράνειας I_2/I_1 των παραπάνω στερεών .

(Στη συνέχεια το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσε να εφαρμοστεί ώστε να υπολογιστούν τα πηλίκα των μεγεθών των παραπάνω ερωτημάτων)

Απαντήσεις



1) Ο συμπαγής κύλινδρος έχει μικρότερη ροπή αδράνειας από τον κούφιο λόγω κατανομής της ίδιας ποσότητας μάζας πλησιέστερα στον άξονα περιστροφής , άρα $\mathbf{I_1<I_2}$ (1)

Γενικά αν εφαρμόσουμε τις εξισώσεις δυναμικής για κυλινδρικό σώμα που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο πλάγιο επίπεδο έχουμε : $\Sigma F_x=m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\varphi - T = m\alpha$

$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \rightarrow TR = I\alpha_\gamma$ όμως αφού έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση σε ακλόνητο δρόμο ισχύει : $\upsilon=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$ και $\alpha=\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_\gamma R$ οπότε έχουμε ότι: $T=I\alpha/R^2$ άρα $mg\eta\mu\varphi=m\alpha+I\alpha/R^2 \rightarrow$ $\mathbf{\alpha=(mgR^2\eta\mu\varphi)/(mR^2+I)=\sigma\tau\alpha\theta}$ (2) άρα από (1) συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{\alpha_1>\alpha_2}$ (3) επίσης βλέπουμε ότι $T=mg\eta\mu\varphi - m\alpha = \sigma\tau\alpha\theta$ άρα $\mathbf{T_1<T_2}$ (4)δηλαδή ο κούφιος κύλινδρος δέχεται κάθε στιγμή μεγαλύτερη στατική τριβή κατά τη μη ολισθαίνουσα κίνησή του.

α) αφού οι κύλινδροι διανύουν την ίδια απόσταση μέχρι να φτάσουν στη βάση έχουμε :
$\Delta\chi_1 = \Delta\chi_2 \rightarrow \alpha_1\Delta t_1{}^2/2 = \alpha_2\,\Delta t_2{}^2/2 \rightarrow$ από (3) όμως έχουμε $\mathbf{\Delta t_1 < \Delta t_2}$ άρα ο συμπαγής κύλινδρος φτάνει πρώτος στη βάση.

β) κάθε στιγμή κατά την διάρκεια της κίνησής τους ισχύει $dL/dt= \Sigma\tau = T\,R$ όμως από (4) βλέπουμε ότι $T_1<T_2$ άρα ισχύει $\mathbf{dL_1/dt< dL_2/dt}$

γ) οι στατικές τριβές που δέχονται οι κύλινδροι, ως οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούν ροπή στρέψης είναι σταθερές άρα $\Sigma\tau=dL/dt=TR=\sigma\tau\alpha\theta$ άρα για μη απειροστό χρονικό διάστημα ισχύει και $\Sigma\tau=\Delta L/\Delta t \rightarrow \Delta L=TR\Delta t \rightarrow L-0=TR\Delta t$ άρα
$\mathbf{L=TR\Delta t}$ (5) και αφού $T_1<T_2$ άρα σε ίσα χρονικά διαστήματα κίνησης ισχύει $\mathbf{L_1<L_2}$.

δ)τώρα για ίσες μετατοπίσεις ισχύει όπως είπαμε στο ερώτημα α) ότι $\Delta t_1 <\Delta t_2$
και επίσης ανεξάρτητα χρονικής στιγμής ή θέσης ισχύει $T_1<T_2$ άρα από (5) $L=TR\Delta t$
συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{L_2>L_1}$.

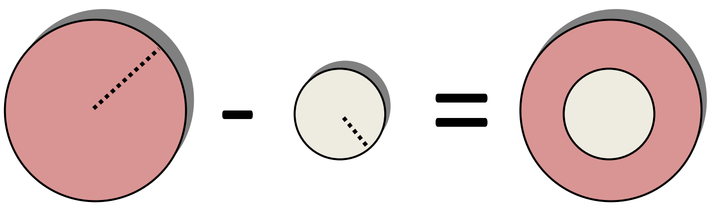
ε) τα στερεά κατά την κατά την κίνησή τους στο ακλόνητο επίπεδο δεν ολισθαίνουν άρα διατηρείται η μηχανική τους ενέργεια άρα $K_{O\Lambda\tau\varepsilon\lambda}= U_{\alpha\rho\chi}=mgh=$ κοινό
άρα τα στερεά έχουν ίσες ολικές κινητικές όταν φτάνουν στη βάση του κεκλιμένου οπότε εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ μόνο για τη μεταφορική τους κίνηση θα έχουμε :
$K_{TE\Lambda\,\mu\varepsilon\tau\varphi} - 0= mgh - T\Delta\chi$ (προσοχή το έργο της στατικής τριβής στη μεταφορά δεν είναι μηδέν) όμως $mgh =$ κοινό , $\Delta\chi=$ κοινό ,όμως $\mathbf{T_1<T_2}$ άρα $K_{\mu\varepsilon\tau\varphi1}>K_{\mu\varepsilon\tau\varphi2}$
και αφού $K_{O\Lambda1}=K_{O\Lambda2}$ άρα $K_{\sigma\tau\rho\varphi1} < K_{\sigma\tau\rho\varphi\,2}$ άρα $\mathbf{K_{\sigma\tau\rho1}/K_{\sigma\tau\rho2} <1}$

(**Σχόλιο**: θα μπορούσε να απαντηθεί εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ μόνο για τη στροφική κίνηση κάθε στερεού όπου το έργο της ροπής της στατικής τριβής είναι θετικό ως η μοναδική δύναμη που αυξάνει τη στροφική κινητική ενέργεια κάθε στερεού. Στην προκειμένη περίπτωση αφού τα σώματα δεν ολισθαίνουν σε ακλόνητο δρόμο ισχύει ότι το σημείο επαφής του με το δρόμο έχει συνολική ταχύτητα μηδέν άρα ισχύει και τόξο $s=\Delta\chi=\Delta\theta\,R$ άρα τα σώματα αφού έχουν ίσες μετατοπίσεις θα έχουν διαγράψει και ίσες γωνίες $\Delta\theta$ και θα έχουν εκτελέσει και ίδιο πλήθος περιστροφών . Από ΘΜΚΕ στροφικής $K_{\tau\varepsilon\lambda\,\sigma\tau\rho\varphi}= T\Delta\theta$ και αφού $T_2>T_1$ άρα και $K_{\sigma\tau\rho\varphi\,\tau\varepsilon\lambda\,2}> K_{\sigma\tau\rho\varphi\,\tau\varepsilon\lambda\,1}$). Μπορούμε να ακολουθήσουμε και το δρόμο της κινηματικής κτλ.

2) **στ)** Τώρα στην περίπτωση του ολισθηρού πλαγίου επιπέδου οι κύλινδροι δέχονται τριβή ολίσθησης και όχι στατική τριβή η οποία όμως ασκεί ροπή στρέψης στα στερεά τα οποία εκτελούν σύνθετη κίνηση. Ας δούμε τη δυναμική προσέγγιση.
$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ άρα θα δέχονται τριβή ολίσθησης ίσου μέτρου $T=mg\mu\sigma\upsilon\nu\varphi$ δηλαδή $\mathbf{T_1=T_2}$ **.**
Επίσης $\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\varphi - T = m\alpha =$ κοινό άρα αποκτούν ίσες επιταχύνσεις $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha_2}$ και αφού ξεκινούν από την ηρεμία διανύοντας ίσες αποστάσεις μέχρι τη βάση του πλάγιου επιπέδου συμπεραίνουμε ότι φτάνουν ταυτόχρονα $\mathbf{\Delta t_1 = \Delta t_2}$. Όμως $\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \rightarrow TR = I\alpha_\gamma \rightarrow \alpha_\gamma = TR/I$ άρα αφού ισχύει $I_1<I_2$ τότε $\boldsymbol{\alpha_{\gamma1}>\alpha_{\gamma2}}$ οπότε από $\Delta\theta=\alpha_\gamma \Delta t^2/2$ συμπεραίνουμε ότι στα ίσα χρονικά διαστήματα που διαρκεί η κατάβασή τους , ο συμπαγής κύλινδρος διαγράφει μεγαλύτερη γωνία άρα από $N=\Delta\theta/2\pi$ προκύπτει ότι εκτελεί και περισσότερες περιστροφές $\mathbf{N_1>N_2}$**.**

ζ) Λόγω της τριβής ολίσθησης κατά την κίνηση των στερεών παράγεται θερμότητα.
Επειδή τα σώματα κατά την κίνησή τους έχουν $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha_2}$ **,** $\mathbf{\Delta t_1 = \Delta t_2}$ τότε αποκτούν ίσες ταχύτητες τη στιγμή που φτάνουν στη βάση $\upsilon=\upsilon_0+\alpha\Delta t$, άρα αφού $\upsilon_1=\upsilon_2$ τότε αποκτούν ίσες μεταφορικές κινητικές ενέργειες δηλαδή $K_{\mu\varepsilon\tau\varphi1}=K_{\mu\varepsilon\tau\varphi2}$. Όμως βλέπουμε ότι $\Sigma\tau=TR=$ σταθερό άρα και πάλι ισχύει $dL/dt= \Delta L/\Delta t =TR \rightarrow L=TR\Delta t$ όμως τώρα ισχύει $\mathbf{T_1=T_2}$ και επίσης $\mathbf{\Delta t_1 = \Delta t_2}$ άρα $\mathbf{L_{\tau\varepsilon\lambda1}=L_{\tau\varepsilon\lambda2}}$ οπότε για τις τελικές στροφικές κινητικές ενέργειες των στερεών $K_{\sigma\tau\rho}= L^2/2I$ έχουμε ότι $K_{\sigma\tau\rho\varphi1} > K_{\sigma\tau\rho\varphi2}$ αφού $I_1<I_2$.
Εφαρμόζοντας ΑΔΕ για την σύνθετη κίνηση των σωμάτων έχουμε : $mgh= K_{\sigma\tau\rho\varphi} + K_{\mu\varepsilon\tau\varphi} + Q \rightarrow Q_2 - Q_1 = K_{\sigma\tau\rho\varphi1} - K_{\sigma\tau\rho\varphi2} > 0$.
Άρα $\mathbf{Q_2>Q_1}$ δηλαδή κατά την ολίσθησή του ο κούφιος κύλινδρος αποδίδει περισσότερη ενέργεια υπό μορφή θερμότητας προς το περιβάλλον.

3)



κύλινδρος 3 κύλινδρος 4 δακτύλιος 2

Ο δακτύλιος προκύπτει από τον συμπαγή κύλινδρο 3 εάν αφαιρέσουμε ένα ομογενές ομόκεντρο τμήμα του άρα ισχύει $I_2=I_3-I_4$.Για τους συμπαγείς κυλίνδρους 3,4 που αποτελούνται από υλικό ίδιας πυκνότητας έχουμε: $\rho=m_3/d(R^2\pi)=m_4/d(r^2\pi)$ άρα $m_3=m_4/c^2$
$I_2=m_3R^2/2 - m_4c^2R^2/2 = m_3R^2(1-c^4)/2$ όμως $m_2=m_3-m_4=m_3(1-c^2) \rightarrow m_3=m_2/(1-c^2)$ άρα
$I_2= m_2(1+c^2)R^2/2$ επίσης ισχύει $I_1=m_1R^2/2$ και αφού ισχύει $m_1=m_2$ έχουμε
$\mathbf{I_2/I_1=(1+c^2)}$ **(π.χ** για $r=R/2$ έχουμε $c=1/2$ άρα $I_2/I_1=1{,}25$.)

(Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των πηλίκων των μεγεθών που αναφέρονται στα παραπάνω ερωτήματα)

....στο Γιάννη Δογραματζάκη

manmar7@yahoo.gr